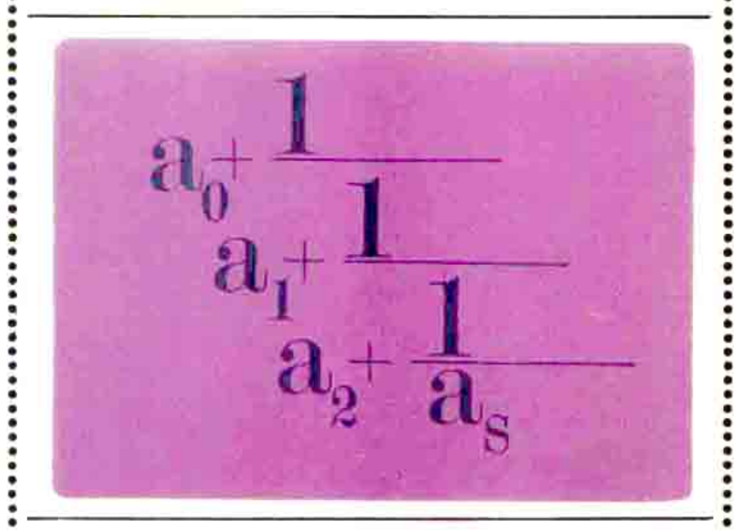
Lecciones populares de matemáticas

FRACCIONES MARAVILLOSAS

N. Beskin



Editorial MIR



Moscú

FRACCIONES MARAVILLOSAS

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Н. М. БЕСКИН

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ДРОБИ

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

N. M. BESKIN

FRACCIONES MARAVILLOSAS



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por A. Neémi

Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

PREFACIO

Este libro está destindo a los escolares quienes se interesan por las matemáticas. Está dedicado a uno de los apartados más cautivadores de la aritmética, la aproximación de los números reales mediante los racionales.

Ultimamente entre cierta parte de los jóvenes matemáticos (a propósito, no sólo jóvenes) surgió una actitud despectiva con respecto a la matemática «clásica» y «pura» como contrapeso de la «moderna» y la «aplicada». No obstante, tal contraposición es errónea.

Primero, toda la matemática existe sobre una base muy vasta y cada matemático debe conocer los resultados clásicos más fundamentales. En particular, la teoría de las fracciones continuas que constituye un apartado de la matemática clásica pura, hoy en día se usa ampliamente para calcular los valores de las funciones con ayuda de computadores.

Segundo, en el proceso de desarrollo de la ciencia muchos apartados y teorías viejos están perdiendo su importancia marchitándose como las ramas de un árbol. ¡Muchos, pero no todos! Hay teorías que existen muchos siglos (a veces, aun milenios) y, sin embargo, siguen siendo actuales.

Las fracciones continuas constituyen una de las más perfectas creaciones de los matemáticos de los siglos XVII—XVIII (Huygens, Euler, Lagrange, Legendre). El conocimiento de sus propiedades deja a uno pasmado.

Leyendo el presente libro hace falta tener en cuenta dos circunstancias.

1. En el mismo hay dos grados de dificultad: con letra grande se expone el material fácil y con letra menuda, el más difícil. Con letra menuda se ofrecen las demostraciones de los teoremas difíciles, las cuales pueden omitirse sin perjudicar la comprensión. Dado este caso, se necesita creer de buena fé los respectivos teoremas.

¡No obstante, sería mejor no omitir nada!

Las matemáticas no representan sólo una lectura entretenida. El futuro matemático (al igual que el físico o ingeniero) debe adquirir una experiencia para poder realizar cálculos y demostraciones complicados. Tome un

lápiz y una hoja de papel y analice minuciosamente el texto escrito con letra menuda. A lo mejor podrá usted simplificar algunas demostraciones o sustituirlas por otras más perfectas.

2. La teoría de las fracciones continuas es bastante amplia. En el presente libro se exponen únicamente los datos fundamentales. Sin embargo, en el mismo está presente todo lo que debe conocer cada uno quien se interesa por las matemáticas. Los especialistas deben conocer mucho más.

Nikolai Beskin

CAPÍTULO I

DOS ENIGMAS HISTÓRICOS

§ 1. ENIGMA DE ARQUÍMEDES

1. El número de Arquímedes. Hay muchos que suponen: para poder encontrar algo extraordinario hace falta dirigirse a un lugar distante, lo mejor, al cosmos o al fondo del océano, ya que en la vida habitual, alrededor de nosotros todo está bien conocido y no hay nada interesante.

¡Qué equivocación! Nos encontramos rodeados por fenómenos enigmáticos, pero no meditamos sobre los mismos porque estamos acostumbrados a ellos. En este capítulo vamos a tratar dos hechos enigmáticos (aunque conocidos por todos) de la historia de las matemáticas.

Los escolares del mundo entero conocen del curso de geometría que Arquímedes encontró para el número π[1]) un valor aproximado 22/7[2]). Este hecho ya es tan usual que muchos no suponen qué secreto incubre. Son muchos los que se plantean la pregunta: ¿por qué Arquímedes escogío precisamente los séptimos? ¿Qué será si expresamos π aproximadamente en octavos?

Esta pregunta resulta ser muy interesante.

---

[1]) La letra π es la primera letra de la palabra griega περιφερεια quo significa «circunferencia». El matemático inglés Jones en 1706 por primera vez designó con la letra π la razón entre la longitud de la circunferencia y la longitud del diámetro. A partir de 1736 empezó a usar esta designación L. Euler (anteriormente usaba la letra p). Desde aquel entonces esta designación es adoptada por todo el mundo.

[2]) En realidad, Arquímedes en su obra «Medición del círculo» formuló este resultado de una manera algo distinta. Indicó los límites para π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Arquímedes lo expuso así: «El perímetro de todo círculo es igual al diámetro triplicado con exceso, que es menor que la séptima parte del diámetro pero mayor que diez septuagésimo primero».

Se puso en uso el valor $3\frac{1}{7}$ como el más simple, aunque es más próximo a $3\frac{10}{71}$.

2. Aproximación. En diferentes apartados de las matemáticas se encuentran problemas del siguiente tipo: hace falta sustituir cierto objeto (número, función, figura, etc.) por otro de la misma naturaleza, pero más simple y suficientemente próximo al objeto dado. Tal sustitución se denomina *aproximación*. En cada caso concreto en el conjunto de objetos a aproximar, debe separarse un subconjunto de objetos que se consideran más simples, y hace falta definir qué significa «suficientemente próximos». No obstante, no tenemos necesidad

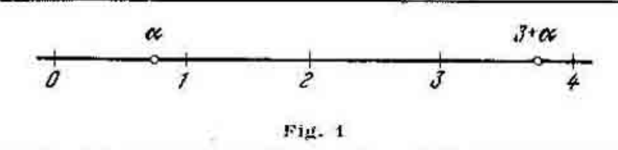


Fig. 1

de estudiar el problema de aproximación en forma tan general. Hablaremos sobre un caso particular, o sea, la aproximación de números reales.

Consideremos un conjunto de todos los números reales. Se ha adoptado designarlo con la letra **R** (la primera letra de la palabra francesa «réel» — real). Los números reales pueden tener una naturaleza compleja (números irracionales) o ser voluminosos (las fracciones[1]) con grandes denominadores).

Aquí hay que aclarar el porqué la voluminosidad de una fracción se aprecia por la magnitud de su denominador y no del numerador. Si nos interesa no tanto la magnitud de un número real α como su naturaleza aritmética, entonces nos importa la situación de este número entre los números enteros consecutivos n y $n+1$. El desplazamiento del número α por el eje numérico a un número entero no cambia su naturaleza aritmética.[2]) En la fig. **1** están marcados los números α y $3+\alpha$ que no se diferencian por su posición en los segmentos[3]) $[0, 1]$ y

[1]) Recordemos que la fracción es un número p/q donde p y q son *números enteros* y $q \neq 0$. De tal modo, los números $\sqrt{3}/3$ ó $\pi/2$ no son fracciones.

[2]) Todo lo dicho no se refiere a la aritmética que estudia números enteros.

[3]) La definición del término «segmento» se da en el p. 23.

[3, 4]. No hay razón para considerar el número $\frac{391}{4} = 97\frac{3}{4}$ más complejo que 3/4. Podríamos limitarnos al estudio de la naturaleza de números en el segmento [0, 1]: en cada segmento $[n, n+1]$ se repite el mismo cuadro. Precisamente por eso, al apreciar el grado de complejidad de una fracción nos interesa su denominador y no el numerador.

De un conjunto de números reales **R** separamos un subconjunto de fracciones con un denominador dado q. La distancia entre el número α y la fracción p/q es $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$. Ahora el problema acerca de la aproximación de los

Fig. 2

números reales puede formularse así: *dar expresión aproximada de un número real α en forma de una fracción con el denominador q significa hallar entre todas las fracciones con el denominador q la más próxima al número α.*

Si en el eje numérico están marcadas todas las fracciones con el denominador q entonces el número α resultará entre dos fracciones (no nos interesa el caso cuando α coincida con una de las mismas):

$$\frac{p-1}{q} < \alpha < \frac{p}{q}.$$

De dichas fracciones se escoge la más próxima a α (véase la fig. 2).

Puede suceder que α coincida con el punto medio del segmento $\left[\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q}\right]$. En este caso (y solamente en éste),

el problema tiene dos soluciones. *Para certidumbre*, convengamos en preferir el extremo izquierdo.

De todo lo expuesto está claro que para la aproximación del número α podemos usar fracciones con cualquier denominador, o sea, la selección del denominador q depende únicamente de nuestro deseo. La aproximación se aplica para la sustitución de números irracionales. Además, los números racionales se pueden sustituir por otros menos voluminosos (con denominador menor). Citemos un ejemplo. El valor aproximado del número $\frac{2936}{7043}$ en duodécimas partes es

$$\frac{2936}{7043} \approx \frac{5}{12},$$

ya que

$$\frac{5}{12} < \frac{2936}{7043} < \frac{6}{12},$$

y además, $\frac{2936}{7043}$ es más próximo a $\frac{5}{12}$ que a $\frac{6}{12}$.

Estamos acostumbrados a aproximar los números reales mediante fracciones decimales. Sin embargo, en los tiempos de Arquímedes las fracciones decimales no fueron inventadas todavía[1]) y Arquímedes pudo escoger cualesquiera partes para la aproximación de π. ¿Por qué, entonces, escogió los séptimos? ¿Puede ser que por casualidad?

3. Error de la aproximación. En el proceso de aproximación de un número real α mediante la fracción p/q surge un *error*

$$\Delta = \alpha - \frac{p}{q}.$$

Recordemos: *el error es el valor exacto menos el aproximado.*

---

[1]) Las fracciones decimales aparecieron a fines del siglo XVI (por cuanto se trata de Europa; en el Oriente ya se conocían en el siglo XV). Fueron inventadas por el sabio de Flandes Simon Stevin. Aquí se tiene un testimonio competente del escritor inglés Jerome C. Jerome: «De Gent nos dirigimos a Brugge (donde aproveché la ocasión de lanzar una piedra al monumento a Simon Stevin quien inventó las fracciones decimales, con lo cual me causó muchos disgustos en los años escolares), y luego regresamos acá». («Memorias de un viajero», nota del 9 de junio).

Entonces resulta que si se tiene una aproximación con falta entonces el error es positivo y si se tiene una aproximación con exceso, éste es negativo.

El valor absoluto del error $|\Delta|$ se denomina *error absoluto*.

Está claro que para el procedimiento escogido de aproximación el error absoluto no puede sobrepasar $1/2q$ (véase la fig. 2):

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2q}.$$

El número $1/2q$ es *el límite superior del error absoluto*. Para el otro procedimiento de aproximación el límite superior puede ser diferente. Por ejemplo, si *hubieramos convenido* en tomar siempre la aproximación con falta, es decir, siempre escoger el extremo izquierdo del segmento $\left[\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q}\right]$, entonces el error sería igual a $1/q$.

Fig. 3

4. La utilidad de la aproximación. El error absoluto alcanza el límite superior en aquel caso (el mas desfavorable) cuando α es el punto medio del segmento $\left[\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q}\right]$. Si α se sitúa en el mismo segmento muy cerca a uno de sus extremos, entonces el error absoluto real puede ser considerablemente inferior al límite superior.

Todo ello sugiere introducir el concepto acerca de *la utilidad* de la aproximación. *La sustitución aproximada del número α por una fracción es conveniente si dicha fracción, siendo el denominador pequeño, brinda una alta precisión.* Más rigurosamente, si el error absoluto es considerablemente menor de lo que se espera juzgando por el denominador q. La fig. 3 aclara esta idea.

Para poder caracterizar la utilidad hace falta comparar dos magnitudes: el error absoluto real y el límite superior del error absoluto:

$$\frac{\text{error absoluto}}{\text{límite superior del error absoluto}}=\frac{|\alpha-p/q|}{1/2q}=2\,|q\alpha-p|.$$

Para simplificar se ha aceptado considerar la mitad de esta magnitud. Designémosla por h y denominémosla *error reducido*

$$h=|q\alpha-p|. \tag{1.1}$$

Recordemos: *el error reducido h es la mitad de la relación entre el error absoluto real y el máximo posible.* Evidentemente:

$$0<h\leqslant 1/2.$$

Mientras menos sea h más conveniente será la aproximación.

Denominaremos la magnitud

$$\lambda=\frac{1}{2h}=\frac{1}{2\,|q\alpha-p|} \tag{1.2}$$

coeficiente de utilidad. Su sentido es muy simple: *el coeficiente de utilidad demuestra cuántas veces el error absoluto real es menor que el máximo posible.* Evidentemente

$$1\leqslant\lambda<\infty.$$

Entonces, cuanto mayor sea λ, tanto más útil será la aproximación.

No hay que pensar que las partes más menudas son las más útiles. Puede suceder que al trazar en el eje numérico las octavas partes el número α ocupe una posición menos favorable que al trazar los séptimos. Llevemos a cabo un experimento con el número π aproximándolo mediante diferentes partes: desde las primeras hasta las décimas (véase la tabla 1). Omitimos los cálculos; el lector los puede realizar por sí mismo.

Esta tabla demuestra que para fines de la aproximación de π los séptimos resultan mucho más convenientes que las partes vecinas más próximas. El error real es más de 56 veces menor que se podía imaginar juzgando por la dimensión de las partes.

Tabla

q	Valor aproximado de π	Límite superior del error absoluto	$\|\Delta\|$	h	λ
1	3/1	1/2 =0,5000	0,1416	0,1416	3,5
2	6/2	1/4 =0,2500	0,1416	0,2832	1,8
3	9/3	1/6 =0,1667	0,1416	0,4248	1,2
4	13/4	1/8 =0,1250	0 1084	0,4336	1,2
5	16/5	1/10=0,1000	0,0584	0,2920	1,7
6	19/6	1/12=0,0833	0,0251	0,1504	3,3
7	22/7	1/14=0,0714	0,0013	0,0089	56,5 (¡!)
8	25/8	1/16=0,0625	0,0166	0,1327	3,8
9	28/9	1/18=0,0556	0,0305	0,2743	1,8
10	31/10	1/20=0,0500	0,0416	0,4159	1,2

En la fig. 4 se expone la posición del número π en el eje numérico. Por casualidad (aunque, ¿verdaderamente por casualidad?) π resulta encontrarse muy cerca de $3\frac{1}{7}$. Si nos hubieran ordenado con antelación aproximar π de

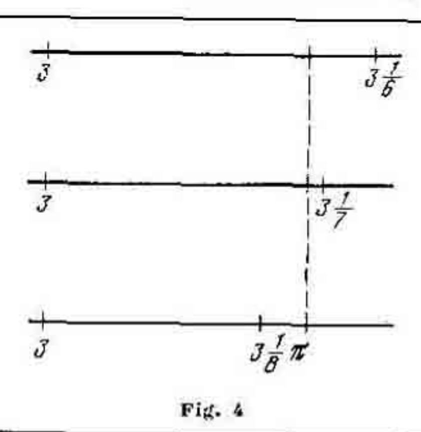


Fig. 4

tal modo que el error absoluto no sobrepasara de 0,0013, ¿qué partes habríamos escogido? Apuntaríamos la condición

$$1/2q \leqslant 0,0013$$

de dondo $q \geqslant 385$, no obstante, Arquímedes alcanzó la misma precisión al tomar el denominadror mucho menor.[1])

No, no por casualidad Arquímedes escogió para la aproximación del número π precisamente los séptimos. Pero, ¿cómo pudo lograrlo?

Pasados muchos siglos (en el año 1585) el holandés Adrian Antonius encontró para π el valor aproximado: $\pi \approx 355/113$.

Este resultado fue publicado solamente después de la muerte de Antonius, por su hijo Adrian Metzys, por lo cual esta magnitud 355/113 empezó a denominarse *número de Metzys*. Dicho número posee la misma propiedad asombrosa que el número de Arquímedes: el denominador 113 resulta ser mucho más útil de lo que se podía imaginar juzgando por su magnitud. Recomendamos a nuestro lector que analice el número de Metzys así como se ha analizado anteriormente el número de Arquímedes. ¿A qué será igual el coeficiente de utilidad?

Sin duda alguna, el número de Metzys no fue hallado casualmente. Fue descubierto mucho más antes de que lo encontró Adrian Antonius.

§ 2. ENIGMA DE GREGORIUS XIII

5. El problema matemático del calendario. Gregorius XIII no era matemático. Fue el Papa de Roma, pero su nombre está ligado con un problema matemático muy importante, el del calendario.

La naturaleza nos dio dos unidades naturales de tiempo: el año y el período de veinticuatro horas: el día y la noche (solares). Según un antiguo manual de cosmografía «*lamentablemente* el año no contiene un número entero de días». No podemos no aceptarlo ya que de este hecho mencionado provienen muchas incomodidades. En

---

[1]) La veracidad requiere hacer acordar: las 385 partes permiten aproximar cualquier número real con un error menor de 0,0013, mientras que los séptimos resultaron ser más convenientes para el número π.

cambio, origina un problema matemático interesante.

1 año = 365 días 5 horas 48 minutos 46 segundos =

= 365,242199 días. [1])

En la vida civil es imposible legalizar tal duración del año. ¿Y qué será si aceptemos el año civil igual precisamente a 365 días? En la fig. 5 está representada la órbita

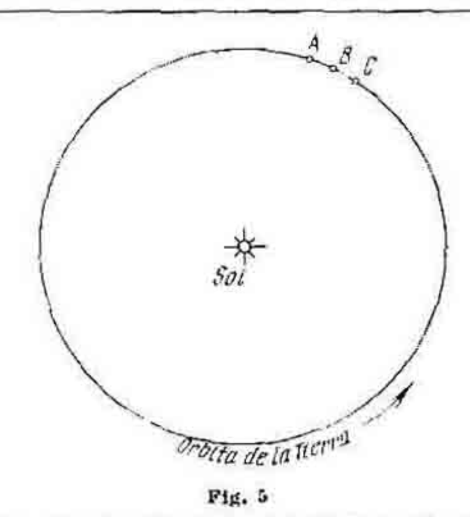


Fig. 5

de la Tierra. El 1 de enero de 1980 a las 0 horas la Tierra se encontraba en el punto *A*. En el transcurso de 365 días no podrá alcanzar el punto *A*, por lo cual a las 0 horas del 1 de enero de 1981 resultará en el punto *B* y el 1 de enero de 1982, en el punto *C*, etc. Entonces, resulta que si fijamos la posición de la Tierra en la órbita correspondiente a una fecha dada, ésta será todos los años diferente: se atrasará casi en 6 horas. Durante 4 años este atraso constituirá casi un día y la fecha fijada caerá en diferentes estaciones del año, o sea, el 1 de enero del invierno se desplazará gradualmente para el otoño, luego

[1]) En el presente libro no tratamos de una manera detallada las cuestiones astronómicas (por ejemplo, la variación de la duración del año), tampoco las cuestiones vinculadas con la historia del calendario, sino atraemos su atención sobre un solo problema matemático relacionado con el calendario.

para el verano. Es incómodo: no se podrá relacionar algunas medidas periódicas (siembra, comienzo del año escolar) con unas fechas de calendario bien definidas.

No obstante, existe salida de esta situación. Hace falta considerar que unos años tienen 365 días y otros 366 días, alternándolos de tal manera que la duración media del año sea la más próxima posible a la auténtica. Así podemos reproducir la duración auténtica del año con cualquiera precisión, pero para ello se necesitará una ley muy compleja de alternación de los años cortos (ordinarios) y largos (bisiestos) lo que es indeseable. Se requiere un compromiso: una ley comparativamente sencilla de alternación de los años cortos y largos que puede brindar una duración media del año suficientemente próxima a la auténtica.

6. Calendario juliano y calendario gregoriano. Por primera vez este problema fue resuelto por Julio César. Para precisar, lo hizo por su encargo, el astrónomo de Alejandría, Sosígenes, llamado con este objetivo a Roma. Julio César introdujo el sistema siguiente: tres años seguidos cortos (ordinarios) y el cuarto, largo (bisiesto). Mucho más tarde, cuando fue adoptada la cronología cristiana, empezaron a considerar bisiestos aquellos años cuyo número se dividía en cuatro.

Este calendario se denomina *juliano*. En Rusia existió hasta febrero de 1918. Según este calendario la duración media del año es igual a $365\frac{1}{4}$ días = 365 días 6 horas.

Es evidente que la duración media del año juliano sobrepasa la auténtica en 11 minutos 14 segundos.

El calendario juliano fue perfeccionado por el papa Gregorius XIII (los proyectos de la reforma del calendario se elaboraron mucho tiempo antes pero no fueron realizados). En 1582 Gregorius XIII introdujo la siguiente reforma del calendario. El conservó la alternación de los años ordinarios y bisiestos pero agregó la regla siguiente: *si el número del año finaliza con dos ceros y el número de centenas no se divide entre 4 entonces este año resulta ordinario.* Por ejemplo, de acuerdo a esta regla el año 1700 es ordinario, mientras que el año 1600, bisiesto. Además, considerando que a partir del comienzo de la era (desde el «nacimiento de Jesucristo») ya se había

acumulado un error de 10 días, Gregorius XIII de una vez adicionó 10 días.[1]) Desde aquel entonces se han acumulado 3 días más (en los años 1700, 1800, 1900). Por esta causa, en la actualidad la diferencia entre el calendario juliano y el nuevo (gregoriano) constituye 13 días.

¿Cuál es la duración media del año gregoriano? De acuerdo al calendario juliano de 400 años 100 son bisiestos y según el gregoriano, 97. Por esta razón, la duración media del año gregoriano es de $365\frac{97}{400}$ días = 365, 242500 días = 365 días 5 horas 49 minutos 12 segundos, o sea, supera la auténtica en 26 segundos.

Como vemos mediante unos procedimientos bastante sencillos se obtuvo una precisión muy alta. ¿Cómo obtuvieron este rasultado?

La respuesta a esta pregunta se da en el capítulo VI

[1]) El papa ordenó que el día siguiente después del 4 de octubre, el jueves, de 1582 se convirtiera en el 15 de octubre, viernes.

CAPÍTULO II
FORMACIÓN DE LAS FRACCIONES CONTINUAS

§ 3. DESARROLLO DE UN NÚMERO REAL EN FRACCIÓN CONTINUA

7. Algoritmo del desarrollo en fracción continua. Olvidemos el sistema decimal de numeración. Como decía en sus conferencias Nikolai Nikoláevich Lusin, el destacado matemático ruso (1883—1950), «las ventajas del sistema decimal no son matemáticas sino zoológicas. Si tuviéramos en las manos no diez sino ocho dedos, la humanidad utilizaría el sistema octonario.» El sistema decimal prácticamente es muy cómodo, sin embargo, para el estudio de los problemas teóricos de la aritmética resulta ser inconveniente.

Así pues, denegemos el sistema decimal y, en general, todo sistema de posición, es decir, tomemos la posición de Arquímedes y meditemos sobre el problema: ¿cuál procedimiento de estimación de un número real es el más natural?

Respondiendo a esta cuestión no pueden surgir dudas: en primer lugar hace falta indicar entre cuáles números enteros está comprendido el número de interés. Por ejemplo,

$$\frac{61}{27} \text{ se encuentra entre } 2 \text{ y } 3;$$

$$\sqrt{2} \text{ está comprendido entre } 1 \text{ y } 2;$$

$$\pi, \text{ entre } 3 \text{ y } 4.$$

Indudablemente, es suficiente indicar solamente el menor de estos números:

$$\frac{61}{27} = = 2 + x \, (0 < x < 1);$$

$$\sqrt{2} = 1 + y \, (0 < y < 1);$$

$$\pi = 3 + z \, (0 < z < 1).$$

Anotemos que tal estimación no está vinculada con el procedimiento de denotación de los números enteros, o sea, con algún sistema concreto de numeración.

Ocupémonos del número $\frac{61}{27}$. Nuestra estimación «más de dos» es demasiado aproximada y sirve únicamente como primera aproximación. Si queremos dar el segundo paso debemos estimar el «complemento» x. Puesto que éste es menor que la unidad, es natural representarlo como una fracción con el numerador 1 (volvamos a apelar a la «naturalidad», pero será por última vez):

$$\frac{61}{27}=2+\frac{1}{x_1}.$$

Ahora x_1 es mayor que la unidad y volvemos a repetir los mismos pasos: separamos una parte entera, etc., etc. Le invitamos a nuestro lector que siga con atención la alternación de estos dos pasos:

$$\frac{61}{27}=2+\frac{7}{27}=2+\frac{1}{\frac{27}{7}}=2+\frac{1}{3+\frac{6}{7}}=$$

$$=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{7}{6}}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}}.$$

La expresión

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{s-1}+\cfrac{1}{a_s}}}},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_s$ son *números naturales*[1]), a_0 es un número natural o cero, que se denomina *fracción continua*.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s$ se denominan *elementos*[2]) de una fracción continua. Se puede decir que hemos desarrollado el número $\frac{61}{27}$ en fracción continua.

---

[1]) Hagamos recordar que los números naturales son 1, 2, 3, . . . El cero no se considera número natural.

[2]) En ocasiones se denominan *cocientes incompletos*.

A continuación tendremos que utilizar frecuentemente este algoritmo. Consiste en la alternación de dos pasos.

Paso 1. De un número es separada la parte entera, o sea, se representa como la suma de dos sumandos: un número entero más el resto, menor que la unidad.

Paso 2. El segundo sumando se representa como la unidad dividida por un número mayor que la unidad. A este número se le aplica el primer paso, etc.

Antes de profundizarnos en la teoría de fracciones continuas respondamos a tres preguntas.

8. Designación de las fracciones continuas. *Primera pregunta.* ¿No es demasiado voluminosa la designación de la fracción continua? En nuestro ejemplo hemos obtenido una fracción de tres pisos, pero si fuera de veinte pisos no cabría en una hoja de papel.

Es justo, y por eso para las fracciones continuas se usan diferentes designaciones convencionales. Utilizaremos la siguiente:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_s}}}=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_s].$$

Presten atención en el punto y coma. Subraya que la parte entera a_0 es de singular importancia, diferente de otros números (singular no significa más importante, en nuestro caso, más bien es al contrario).

9. Desarrollo de números negativos en fracción continua. *Segunda pregunta.* ¿Cómo desarrollar un número negativo en fracción continua?

Para el desarrollo de un número negativo en fracción continua existen dos procedimientos.

1. Poner el signo «menos» delante de toda la fracción continua. Por ejemplo,

$$-\frac{61}{27}=-\left(2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}\right)=[2;\ 3,\ 1,\ 6].$$

2. Admitir los valores negativos de a_0 (no obstante, a_1, a_2, . . ., a_s siguen siendo positivos). Por ejemplo

(comprueben los cálculos Ustedcs mismos),

$$-\frac{61}{37}=-3+\frac{20}{27}=-3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}=$$

$$=[-3;\ 1,\ 2,\ 1,\ 6].$$

En el presente libro siempre utilizaremos el segundo procedimiento. Así, de aquí y en adelante a_0 *es cualquier número entero* y a_1, a_2, . . . *son números naturales.*

Una vez hecha esta observación, a continuación, al exponer la teoría no vamos a prestar mucha atención a los números negativos. Todo número negativo puede obtenerse al desplazar cierto número positivo en un número entero a la izquierda por el eje numérico. Para analizar la naturaleza aritmética del número $-\frac{61}{27}$, se puede estudiar el número $\frac{20}{27}$ y luego desplazalro a tres unidades a la izquierda.

10 Algunos ejemplos cuando el proceso de desarrollo es infinito. *Tercera pregunta.* ¿Es el proceso de desarrollo de un número α en fracción continua obligatoriamente interrumpido?

No, puede resultar infinito. Citemos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 1. Desarrollar $\sqrt{2}$ en fracción continua.

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x_1};$$

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x_2};$$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Como resultado, $x_2 = x_1$. Por lo tanto, a partir de este lugar, todo se repetirá, o sea, $x_3 = x_2$, $x_4 = x_3$, . . . Sucesivamente obtenemos:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{x_1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_2}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_3}}}\ \ldots$$

Mientras apuntamos $\sqrt{2}$ en forma final (pero con la participación de x_n irracional) podemos hacer uso del signo de igualdad. Si este proceso continúa infinitamente, obtendremos

$$\sqrt{2} \sim [1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots],$$

es decir, al número $\sqrt{2}$ le *corresponde* una fracción continua infinita. El signo de igualdad entre $\sqrt{2}$ y la fracción continua infinita $[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots]$ no puede ponerse ya que no sabemos todavía realizar el paso de uno de estos

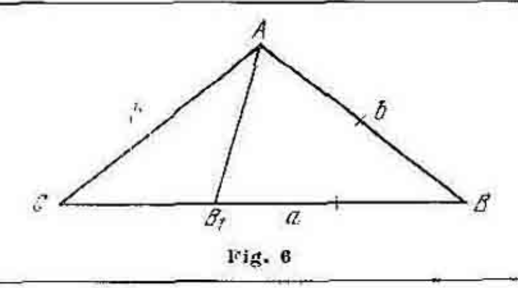


Fig. 6

dos símbolos al otro en cualquier dirección. El símbolo de la fracción continua infinita no tiene por ahora sentido para nosotros. Este problema será discutido en detalles y resuelto en el capítulo IV.

Ejemplo 2. En los problemas geométricos se puede buscar el desarrollo en fracción continua de una magnitud geométrica cuyo valor numérico no está dado. Hallemos, por ejemplo, la relación entre la base y el lado lateral de un triángulo isósceles con el ángulo de 108°.

En el triángulo ABC (fig. 6) los ángulos son iguales a 108°, 36°, 36°, respectivamente. Trazamos $BB_1 = b$ (está claro que b cabe una vez en a ya que $a < 2b$).

Tenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{BC}{BB_1} = \frac{BB_1 + B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{B_1C}{BB_1} = 1 + \frac{1}{x_1};$$

$$x_1 = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{AC}{B_1C}.$$

Pero el triángulo B_1AC es semejante al de partida (calcúlese la magnitud de los ángulos). En la primera

fila determinamos la relación a/b de la base al lado lateral. En la segunda fila nos encontramos de nuevo frente al mismo problema: x_1 representa la relación de la base

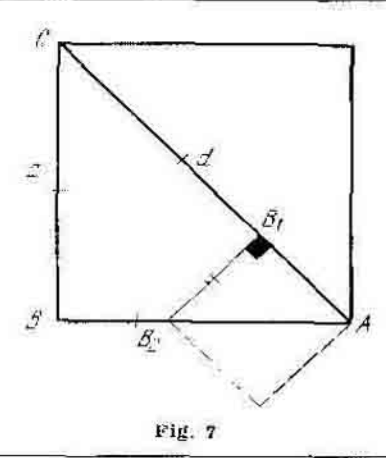


Fig. 7

al lado lateral en el triángulo de la misma forma. Ya que después del primer paso volvemos a obtener la posición inicial, entonces el proceso será infinito

Podemos escribir

$$\frac{a}{b} \sim [1; 1, 1, 1, \ldots].$$

De modo análogo, se puede demostrar que

$$\frac{b}{a} \sim [0; 1, 1, 1, \ldots].$$

Volveremos a tratar este resultado al final del p. 32.

Ejemplo 3. Desarrollar en fracción continua la relación de la diagonal de un cuadrado a su lado.

Este ejemplo es más complicado que el anterior. Si en el ejemplo 2, después de un paso del proceso regresamos a la posición inicial, aquí—después de dos pasos.

Si se considera conocido que $d/a = \sqrt{2}$, entonces este ejemplo coincide con el ejemplo 1. No obstante, de los razonamientos geométricos podemos obtener el desarrollo de la relación d/a en fracción continua sin saber su valor numérico.

La posición inicial: hace falta trazar en la diagonal un segmento igual al lado del cuadrado. Éste cabe en la diagonal una sola vez. Tenemos (véase la fig. 7):

$$\frac{d}{a}=\frac{CA}{CB}=\frac{CB_1+B_1A}{CB}=1+\frac{1}{x_1};$$

$$x_1=\frac{CB}{B_1A}=\frac{AB}{AB_1}.$$

Construimos $B_1B_2 \perp AC$. Entonces $BB_2=B_1B_2$ (demuéstrenlo Ustedes mismos). El triángulo AB_1B_2 lo completamos hasta que se forme un cuadrado (únicamente para claridad, para la demostración no se necesita). Ahora en BA trazamos el segmento AB_1. Trazándolo una vez obtenemos BB_2 y queda B_2A. Ahora hace falta trazar AB_1 en B_2A, pero esto significa la repetición de la posición inicial: el trazado del lado del cuadrado en la diagonal. Por consiguiente, este proceso es infinito, es decir,

$$x_1=2+\frac{1}{x_1};$$

$$\frac{d}{a}\sim[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots].$$

Es fácil demostrar que

$$\frac{a}{d}\sim[0;\ 1,\ 2,\ 2,\ \ldots].$$

(véase el p. 32).

§ 4 ALGORITMO DE EUCLIDES

11. Algoritmo de Euclides. En el párrafo anterior hemos conocido el algoritmo del desarrollo de un número real en fracción continua. Este algoritmo se componía de dos pasos que se alternaban: 1) separación de la parte entera del número; 2) representación del resto (menor que la unidad) como un número inverso al otro número (mayor que la unidad). Dicho algoritmo constituye un caso particular del llamado algoritmo de Euclides ampliamente usado en las matemáticas.

Primeramente mostremos cómo acciona el algoritmo de Euclides a base del ejemplo de la obtención del MCD (máximo común divisor) de dos números reales.

Sean p y q números naturales. El algoritmo de Euclides consta de los siguientes pasos[1]):

Dividimos	Cociente	Resto
p por q	a_0	r_0
q por r_0	a_1	r_1
r_0 por r_1	a_2	r_2
...	...	...

Escribirémoslo mediante las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{ll} p = a_0 q + r_0 & (0 < r_0 < q); \\ q = a_1 r_0 + r_1 & (0 < r_1 < r_0); \\ r_0 = a_2 r_1 + r_2 & (0 < r_2 < r_1); \\ r_1 = a_3 r_2 + r_3 & (0 < r_3 < r_2); \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ r_{s-3} = a_{s-1} r_{s-2} + r_{s-1} & (0 < r_{s-1} < r_{s-2}); \\ r_{s-2} = a_s r_{s-1}. & \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Aclaración. Al dividir números enteros el resto puede resultar cero. Entonces, ¿por qué excluimos el signo de igualdad en el primer término, es decir, por qué, por ejemplo, escribimos $0 < r_1 < r_0$ en lugar de $0 \leqslant r_1 < r_0$? Porque si resulta que $r_i = 0$, esta iguadad será la última. *El algoritmo obligatoriamente se interrumpirá* ya que los restos $r_0, r_1, r_2, \ldots$ son números enteros no negativos, y cada número consecuente es rigurosamente menor que el anterior. Por lo tanto, en cierto paso el resto será igual a cero.

[1]) Si $p < q$ entonces $a_0 = 0$. Esto no estorba el desarrollo sucesivo del proceso.

Las igualdades (2.1) pueden transformarse del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_0}{q};\\
\frac{q}{r_0} &= a_1 + \frac{r_1}{r_0};\\
\frac{r_0}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1};\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{r_{s-3}}{r_{s-2}} &= a_{s-1} + \frac{r_{s-1}}{r_{s-2}};\\
\frac{r_{s-2}}{r_{s-1}} &= a_s.
\end{aligned}\right\}$$

r_{s-1} es precisamente el MCD de los números p y q.

Cada una de estas igualdades (excepto la última) representa una fracción impropia en forma de la suma de un número entero y una fracción propia. Observemos que *el primer miembro de cada igualdad, a partir de la segunda, es inverso a la fracción propia que figura en la igualdad anterior*. Por esta razón, se puede excluir sucesivamente todos los r_i. Sustituimos en la primera igualdad la fracción r_0/q por su expresión en la segunda igualdad:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_1}{r_0}}.$$

En la igualdad obtenida sustituimos la fracción r_1/r_0 por su expresión en la tercera igualdad:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}}.$$

Si continuamos este proceso, en fin de cuentas obtenemos el desarrollo de p/q en fracción continua. No obstante, no hay ninguna razón para cada vez realizar este proceso de sustitución. Es que acabamos de revelar que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s$ en realidad son elementos de la fracción continua buscada. Nos queda solamente retener en la memoria la siguiente regla.

Para desarrollar p/q en una fracción continua hace falta aplicar para los números p y q el algoritmo de Euclides. Los cocientes obtenidos como resultado de las operaciones de división consecutivas, son en realidad elementos de una fracción continua.

Ejemplo. Desarrollar 61/27 en una fracción continua.

$$\frac{61}{7}\left|\frac{27}{2}\;\frac{27}{6}\right|\frac{7}{3}\;\frac{7}{1}\left|\frac{6}{1}\;\frac{6}{0}\right|\frac{1}{6}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{61}{27}=[2;\,3,\,1,\,6].$$

12. Ejemplos de la aplicación del algoritmo de Euclides. El algoritmo de Euclides puede aplicarse no sólo para hallar el MCD de dos números naturales. Sean p y q elementos de cualquier conjunto en el cual está determinada *la división entera.*[1]) Entonces puede usarse el algoritmo de Euclides.

Por ejémplo, si p y q son segmentos de una recta, entonces, el algoritmo de Euclides puede utilizarse para buscar su medida común. Si p y q son conmensurables el algoritmo de Euclides se interrumpe y el segmento r_{s-1} [véanse las fórmulas (2.1)] será precisamente su medida común. En realidad, la última igualdad (2.1) demuestra que r_{s-1} se contiene en r_{s-2} un número entero de veces. Al sustituir el valor r_{s-2} en la penúltima igualdad, obtendremos

$$r_{s-3}=a_{s-1}a_s r_{s-1}+r_{s-1}=(a_{s-1}a_s+1)\,r_{s-1}.$$

Por lo tanto, r_{s-1} se contiene también en r_{s-3} un número entero de veces. Subiendo de tal manera, en el sistema de fórmulas (2.1) cada vez un escalón, llegaremos a las dos primeras filas, es decir, demostraremos que r_{s-1} contiene un número entero de veces también en p y en q, o sea, r_{s-1} es la medida común para p y q.

Además, el algoritmo de Euclides nos proporciona los elementos de la fracción continua correspondiente a la

[1]) Esto significa que a cada par ordenado de elementos p y q (p es el dividendo y q, el divisor) le corresponde un par ordenado a y r (a es cociente y r, el resto) que satisface dos condiciones: $p=aq+r$, $r<q$. Está claro que en este conjunto deben determinarse la operación de multiplicación y el concepto «menor».

relación p/q. Esto tiene lugar también en el caso cuando los segmentos p y q son inconmensurables. El algoritmo de Euclides resultará infinito y los números a_0; a_1, a_2, . . . serán elementos de una fracción continua infinita correspondiente a la relación p/q.

El algoritmo de Euclides puede aplicarse para polinomios de una variable x. Dado este caso, «menor» debe significar «en grado menor». Aprovechando este algoritmo puede hallarse el MCD de dos polinomios, pero esto no tiene ninguna relación directa con el tema que tratamos.

13. Resultados. En el presente capítulo hemos conocido el algoritmo (en dos variantes) que permite *desarrollar* todo número real α en una fracción continua, es decir, hallar la fracción continua *correspondiente* al número α.

Si α es un número racional, le corresponde una fracción continua finita. En este caso se puede realizar los cálculos en dirección contraria, o sea, hallar el valor de la fracción continua. Por ejemplo,

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{6}{7}}=2+\frac{7}{27}=\frac{61}{27}.$$

Por esta razón, en lugar de decir «al número 61/27 le *corresponde* la fracción continua [2; 3, 1, 6] «puede decirse » el número 61/27 *es igual* a la fracción continua [2; 3, 1, 6]». Hablando de una manera más precisa, esto significa que 61/27 y [2; 3, 1, 6] constituyen dos anotaciones diferentes de un mismo número.

Totalmente de otro modo resulta si α es irracional. En este caso la correspondencia entre α y la fracción continua está determinada solamente en una dirección: al número α le *corresponde* una fracción continua infinita y no al revés. No podemos *calcular* una fracción continua infinita por el mismo procedimiento que utilizamos al calcular [2; 3, 1, 6]. El sentido de la fracción continua infinita hasta ahora nos es desconocido.

Tenemos que resolver este problema. En el capítulo V se mostrará cómo atribuir el sentido a la fracción continua infinita. Al leer los capítulos III y IV hace falta tener presente que el sentido de la fracción continua infinita todavía nos es desconocido.

CAPITULO III

FRACCIONES CONGRUENTES

§ 5. CONCEPTO DE FRACCIONES CONGRUENTES

14. Definición preliminar de una fracción congruente. Se puede interrumpir una fracción continua guardando los elementos $a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n$ y desechando los siguientes elementos $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$. El número obtenido de tal manera se denomina n-ésima *fracción congruente* y se designa p_n/q_n:

$$\frac{p_n}{q_n}=[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}.$$

En particular, para $n = 0$ se tiene la fracción congruente cero

$$\frac{p_0}{q_0}=[a_0]=\frac{a_0}{1}.$$

Observación 1. Esta definición de la fracción congruente no es definitiva. Se precisará en el p. 16.

Observación 2. El concepto de fracción congruente se introduce tanto para las fracciones continuas finitas, como para las infinitas. Para el caso de una fracción continua finita existe la última fracción congruente que coincide con la misma fracción continua. Por ejemplo, para el número 61/27 se tiene

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{2}{1};$$

$$\frac{p_1}{q_1}=[2;\ 3]=\frac{7}{3};$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[2;\ 3,\ 1]=\frac{9}{4};$$

$$\frac{p_3}{q_3}=[2;\ 3,\ 1,\ 6]=\frac{61}{27}.$$

Dado el caso de una fracción continua infinita la secuencia de fracciones congruentes es infinita. El senti-

do de una fracción continua infinita nos es desconocido, pero este hecho no nos impide comprender el sentido de fracciones congruentes. Por ejemplo, para la fracción $[1; 2, 2, 2, \ldots]$

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{1}{1};$$

$$\frac{p_1}{q_1}=[1; 2]=\frac{3}{2};$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[1; 2, 2]=\frac{7}{5};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Alusión. Precisamente esta circunstancia (la posibilidad de formar fracciones congruentes) nos permitirá inspirar el sentido en la fracción continua infinita: considerar que las fracciones congruentes sirven de aproximaciones consecuentes que definen el valor de una fracción continua infinita.

Esta alusión constituye el germen de la teoría ulterior. En el capítulo IV será desarrollado. Pronto demostraremos que para el caso de una fracción continua finita las fracciones congruentes representan aproximaciones consecuentes, mientras tanto lo comprobaremos para el número 61/27. Para estimar las aproximaciones, indiquemos que $61/27 \approx 2{,}259$.

Aproximación		Error
número	valor	
1	$\frac{2}{1}$	0,259
2	$\frac{7}{3}\approx 2{,}333$	−0,074
3	$\frac{9}{4}=2{,}250$	0,009

Observamos que el error tiene los signos que se alternan y decrece en valor absoluto. A continuación se esclarecerá que es una regla general.

15. Ley de formación de fracciones congruentes. Para hallar la n-ésima fracción congruente no hay necesidad

de copiar una fracción continua de varios pisos ni realizar un proceso voluminoso de contracción sucesiva. Existen unas fórmulas recurrentes bastante simples[1]) para el cálculo de p_n y q_n. Evidentemente

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1};$$

$$\frac{p_1}{q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_1a_0+1}{a_1}.$$

A fin de pasar de $\frac{p_1}{p_1}$ a $\frac{p_2}{q_2}$, es necesario sustituir a_1 por $a_1+\frac{1}{a^2}$. Una vez realizadas ciertas transformaciones poco complicadas, obtendremos

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{a_2(a_1a_0+1)+a_0}{a_2a_1+1}.$$

Si ahora examinamos con atención esta fórmula podremos ver su estructura siguiente:

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1a_2+p_0}{q_1a_2+q_0}.$$

Resulta que aquí se observa la ley general. Escribémosla expresando por separado el numerador y el denominador de la n-ésima fracción congruente:

$$\left.\begin{aligned} p_n&=p_{n-1}a_n+p_{n-2};\\ q_n&=q_{n-1}a_n+q_{n-2},\\ n&=2, 3, \ldots, s. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Antes de demostrar las fórmulas (3.1) precisemos su sentido. No atribuimos el sentido a p_n y q_n aparte.[2]) Las fórmulas (3.1) deben entenderse así: como numerador y denominador de la n-ésima fracción congruente *pueden*

---

[1]) Se denomina recurrente la fórmula que representa cualquier elemento de la sucesión a través de uno o varios elementos anteriores. Por ejemplo, la fórmula para el n-ésimo término de una progresión geométrica $u_n=u_{n-1}q$ es recurrente, mientras que la fórmula $u_n=u_1q^{n-1}$, no lo es. Al aprovechar la fórmula recurrente no resulta posible calcular u_n de una vez, sino que hace falta calcular sucesivamente u_2, u_3, . . ., u_n.

[2]) Este punto de vista será modificado en el punto siguiente.

considerarse las expresiones (3.1), pero, al mismo tiempo, en lugar de las mismas pueden tomarse otros valores que les son proporcionales.

▶[1]) Demostraremos las fórmulas (3.1) mediante la inducción. Supongamos que sean justas para cierto valor fijo de n que designaremos por k:

$$\left.\begin{aligned} p_k &= p_{k-1}a_k + p_{k-2}; \\ q_k &= q_{k-1}a_k + q_{k-2}, \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

y demostremos que en este caso serán justas también para $n = k + 1$.

Examinando las expressiones

$$\frac{p_k}{q_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}};$$

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}},$$

podemos observar: *para pasar de* $\frac{p_k}{q_k}$ *a* $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ *hace falta sustituir* a_k *por* $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$. Hagamos esta sustitución en las fórmulas (*). En este caso p_{k-2}, q_{k-2}, p_{k-1} y q_{k-1} no variarán ya que no contienen a_k.

$$p_{k+1} = p_{k-1}\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) + p_{k-2} = \frac{1}{a_{k+1}}[(p_{k-1}a_k + p_{k-2})\,a_{k+1} + p_{k-1}];$$

$$q_{k+1} = q_{k-1}\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) + q_{k-2} = \frac{1}{a_{k+1}}[(q_{k-1}a_k + q_{k-2})\,a_{k+1} + q_{k-1}].$$

Al tomar en consideración que p_{k+1} y q_{k+1} están definidos con una exactitud de hasta el coeficiente de pro-

[1]) ▶ significa el comienzo de la demostración.

porcionalidad, desechemos el factor $\frac{1}{a_{k+1}}$ y sustituimos las expresiones entre paréntesis de acuerdo con las fórmulas (*):

$$\left.\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k a_{k+1} + p_{k-1}; \\ q_{k+1} &= q_k a_{k+1} + q_{k-1}. \end{aligned}\right\}$$

Hemos obtenido las fórmulas (*) con la sustitución de k por $k + 1$.

Además, ya hemos observado que las fórmulas (3.1) son válidas para $n = 2$. De tal modo, hemos demostrado que también son válidas para $n = 2, 3, \ldots, s$. ■[1])

16. Determinación definitiva de una fracción congruente. Ahora vamos a introducir cierta modificación en el sentido del término «fracción congruente». Consideraremos fracciones congruentes de los órdenes nulo y primero las fracciones p_0/q_0 y p_1/q_1, respectivamente, para las cuales $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_1 = a_1$. Consideraremos fracciones congruentes de los órdenes $2, 3, \ldots, s$ aquellas fracciones cuyos numeradores y denominadores se determinan por las fórmulas (3.1) para $n = 2, 3, \ldots, s$.

Es posible que el lector no se de cuenta en qué consiste aquí la modificación. ¿Es que hasta ahora comprendíamos la fracción congruente de otra manera?

Se trata de que un mismo número puede representarse mediante diferentes procedimientos. Por ejemplo, las notaciones 0,5; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$ representan un mismo número. Hasta ahora bajo el término «fracción congruente del n-ésimo orden» comprendíamos un número bien definido independientemente del procedimiento de su notación.

Así, en el ejemplo del punto 8 a la pregunta «¿Cuál es la fracción congruente de segundo orden para el número $\frac{61}{27}$?» se podían haber dado diferentes respuestas: $2\frac{1}{4}$; 2,25; 9/4; 18/8, etc. Todas estas expresiones constituyen un mismo número escrito mediante diferentes procedimientos. Pero, a partir del presente punto, *por término «fracción congruente» comprenderemos no sólo un número*

[1]) ■ significa el final de la demostración.

bien definido, sino que también un procedimiento determinado de su notación. De aquí y en adelante consideraremos que para el número 61/27 la fracción congruente p_2/q_2 constituye 9/4, y la respuesta 18/8 resulta incorrecta.[1])

Ahora *están exactamente definidos el numerador y el denominador de cada fracción congruente y no solamente con una exactitud de hasta el coeficiente de proporcionalidad* (en nuestro ejemplo, $p_2 = 9$, $q_2 = 4$).

Esta consideración es de suma importancia para el desarrollo ulterior de la teoría de fracciones continuas.

Si tenemos presente que todas las letras en las fórmulas (3.1) representan números naturales, entonces llegamos a comprender con facilidad que *los denominadores (así como los numeradores) de las fracciones congruentes crecen estrictamente*, es decir, $q_n > q_{n-1}$, $p_n > p_{n-1}$ ($n = 2, 3, \ldots$). La comparación de p_0, q_0 con p_1, q_1 nos brinda

$$p_1 = p_0 a_1 + 1, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1,$$

de donde se observa que $p_1 > p_0$ y q_0 puede resultar igual a q_1. Tenemos definitivamente

$$\left.\begin{array}{l} q_0 \leqslant q_1 < q_2 < q_3 < \ldots; \\ p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < \ldots \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

Las secuencias (3.2) pueden ser finitas o infinitas en función de que sea finita o infinita la fracción continua que las engendró.

17. Técnica del cálculo de las fracciones congruentes. Indiquemos una disposición cómoda de las notaciones al calcular fracciones congruentes. Escribiremos los valores a_i en la primera fila, p_i, en la segunda y q_i, en la tercera.

a_0	a_1	a_2	a_3		a_{s-1}	a_s
p_0	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_{s-1}	p_s
q_0	q_1	q_2	q_3		q_{s-1}	q_s

[1]) A propósito, 9/4 y 18/8 son *fracciones diferentes* aunque representan *un mismo número racional.*

Primero llenamos toda la primera fila y las dos primeras columnas. Al seguir llenando la tabla hace falta usar el esquema que sigue:

a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p_{n-2}	p_{n-1}	
q_{n-2}	q_{n-1}	

1) la columna $\begin{vmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{vmatrix}$ se multiplica por a_n; 2) a la columna obtenida se le añade la anterior.

Recomendamos hacer uso del mismo esquema si se necesita calcular el valor de una fracción continua finita: la última columna $\begin{vmatrix} p_s \\ q_s \end{vmatrix}$ ofrece la respuesta. Este método es mucho más sencillo que la contracción progresiva.

Hágan Ustedes mismos ejercicios de llenar las tablas para la fracción continua [0; 3, 14, 1, 2, 5].

0	3	14	1	2	5
0	1	14	15	44	235
1	3	43	46	135	721

18. Cocientes completos. Con frecuencia nos vemos obligados a interrumpir el proceso de desarrollo de un número en fracción continua sin llevarlo hasta el final.

Por ejemplo,

$$\frac{61}{27}=2+\frac{1}{\frac{27}{7}}$$

o bien

$$\frac{61}{27}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{7}{6}}}.$$

Los números 27/7 ó 7/6 que figuran aquí se denominan *cocientes completos* (ahora daremos la definición directa de este concepto). Se ha aceptado la siguiente notación:

$$\frac{61}{27}=\left[2\,\middle|\,\frac{27}{7}\right]=\left[2;\ 3\,\middle|\,\frac{7}{6}\right]=[2;\ 3,\ 1,\ 6],$$

es decir, el cociente completo se separa de los elementos anteriores de la fracción continua mediante una línea vertical.

El cociente completo α_n puede determinarse del modo siguiente:

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{\alpha_n}}}}\,, \qquad (3.3)$$

donde

$$\alpha_n=a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\ddots}\,. \qquad (3.4)$$

Hablando metafóricamente, el cociente completo es una fracción continua que comienza no desde a_0, sino que desde cualquier elemento a_n, o sea, una fracción continua de la cual se han cortado todos los elementos iniciales hasta a_{n-1}, inclusive. La igualdad (3.3) se escribe simbólicamente así:

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}\,|\,\alpha_n]. \qquad (3.5)$$

Los cocientes completos poseen la siguiente propiedad: *si cualesquiera dos cocientes completos coinciden, es decir,* $\alpha_n=\alpha_{n+k}$ $(k>0)$, *entonces, en primer lugar, esta coincidencia se repite cada paso igual*

$$\alpha_n=\alpha_{n+k}=\alpha_{n+2k}=\ldots=\alpha_{n+mk}=\ldots$$

y, en segundo lugar, la fracción continua es infinita y periódica.

La demostración es evidente y no vale la pena aducirla en detalles. Nos limitaremos a indicar el primer paso. Cuando nosotros, haciendo uso del algoritmo del desarrollo de un número α en fracción continua, llegamos a cierto cociente completo α_n, entonces *nuestros pasos sucesivos ya no dependen de los anteriores, es decir, no dependen de los elementos* $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$. Por consiguiente, después de a_{n+k-1} en la fracción continua se repetirán los mismos elementos que después de a_{n-1}.

Si α_n es un número natural entonces $\alpha_n=a_n$ y la línea vertical en la igualdad (3.5) puede sustituirse por una coma. Es natural considerar que $\alpha_0=\alpha$.

La fracción continua (3.4) puede ser finita o infinita. El sentido de las fracciones continuas infinitas lo conoceremos en el capítulo IV y mientras tanto vamos a comprender esta notación formalmente.

A continuación vamos a deducir una fórmula que liga los cocientes completos con las fracciones congruentes. Al examinar la fórmula (3.3) observamos: si en el segundo miembro eliminamos $1/\alpha_n$ entonces en lugar de α se obtiene la fracción congruente p_{n-1}/q_{n-1}, la cual de acuerdo a las fórmulas (3.1) se expresa así

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}a_{n-1} + p_{n-3}}{q_{n-2}a_{n-1} + q_{n-3}}.$$

Si ahora en la fórmula obtenida sustituimos a_{n-1} por $a_{n-1} + 1/\alpha_n$ entonces el primer miembro se convertirá en α:

$$\alpha = \frac{p_{n-2}\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{\alpha_n}\right) + p_{n-3}}{q_{n-2}\left(a_{n-1} + \dfrac{1}{\alpha_n}\right) + q_{n-3}} =$$

$$= \frac{(p_{n-2}a_{n-1} + p_{n-3})\,\alpha_n + p_{n-2}}{(q_{n-2}a_{n-1} + q_{n-3})\,\alpha_n + q_{n-2}}.$$

Tenemos definitivamente

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}.$$

§ 6. PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES CONGRUENTES

19. La diferencia de dos fracciones confruentes vecinas. El paso de la n-ésima fracción congruente a la siguiente representa el incremento de la n-ésima fracción y se designa con Δ_n:

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}} = \frac{D_n}{q_nq_{n+1}}, \qquad (**)$$

donde D_n es el numerador;

$$D_n = p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}. \qquad (***)$$

Reduzcamos los índices de p_{n+1} y q_{n+1} según las fórmulas (3.1);

$$D_n = (p_na_{n+1} + p_{n-1})\,q_n - p_n\,(q_na_{n+1} + q_{n-1}) =$$

$$= -(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n).$$

La expresión entre paréntesis es del mismo tipo que la (***) pero todos los índices son menores en una unidad. Por lo tanto la misma representa D_{n-1}:

$$D_n = -D_{n-1}.$$

Esta relación recurrente permite disminuir el índice hasta el cero:

$$D_n = -D_{n-1} = D_{n-2} = -D_{n-3} = \ldots = (-1)^n D_0.$$

Para obtener un éxito completo nos queda calcular directamente D_0:

$$D_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 = 1.$$

Por lo tanto,

$$D_n = p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \qquad (+)$$

y según la fórmula (**)

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}. \qquad (3.6)$$

20. Comparación de dos fracciones congruentes vecinas. Vamos a destacar algunas propiedades importantes más de las fracciones congruentes.

Propiedad 1. *Cada fracción congruente con número impar es mayor que las fracciones vecinas (anterior y posterior). Cada fracción congruente con número par es menor que las fracciones vecinas.*

Al aplicar esta formulación a las fracciones congruentes nula y última (si ésta existe), debe tomarse en consideración que cada una de ellas tiene solamente una fracción vecina.

La validez de esta propiedad es evidente de la fórmula (3.6).

La propiedad 1 significa que las fracciones congruentes sucesivas son alternativamente ora mayor ora menor.

Propiedad 2. *Las diferencias entre dos fracciones congruentes vecinas decrecen en valor absoluto* (se tiene en cuenta: a medida que crece el número).

▶ Comparemos

$$|\Delta_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}};$$

$$|\Delta_{n+1}| = \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}}.$$

Tenemos: $q_{n+2} > q_n$. Por consiguiente, en la segunda fracción el denominador es mayor, mientras que ella misma es menor:

$$|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|. \blacksquare$$

Propiedad 3. *El valor exacto de una fracción continua finita α está contenido entre cualesquiera dos fracciones congruentes vecinas. Todas las fracciones congruentes con números pares se disponen a la izquierda de α, o sea, nos dan*

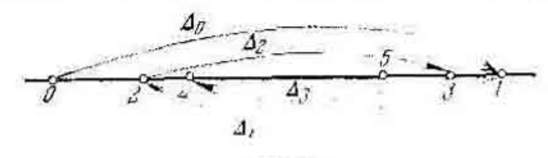


Fig. 8

una aproximación con falta. Todas las fracciones congruentes con números impares se encuentran a la derecha de α, es decir, nos dan una aproximación con exceso.

Es evidente que hace falta excluir la última fracción congruente que es exactamente igual a α.

En la fig. 8 se expone la disposición de fracciones congruentes en el eje numérico. Las inscripciones significan el número de cada fracción y no su valor. El punto más izquierdo corresponde a la fracción congruente N°0 (es decir, la parte entera de una fracción continua). Para poder pasar de la misma a la fracción N°1 hace falta hacer un paso a la derecha. Este paso (o sea, Δ_0) está marcado con un arco por arriba. Para pasar de la fracción N° 1 a la N° 2, es necesario dar un paso atrás, a la izquierda, pero este paso (es decir, Δ_1) será menor que el anterior, etc., etc. Seguimos dando pasos alternativamente a la derecha y a la izquierda del tal modo que cada paso sucesivo sea menor que el anterior. La fig. 8 nos convence de la justeza de la propiedad 3.

La fig. 9 también ilustra la disposición de las fracciones congruentes. En el eje de abscisas marcamos los números de fracciones congruentes y en el eje de ordenadas, sus valores. Al nivel de α está trazada una recta punteada paralela al eje de abscisas.

Propiedad 4. *El error absoluto que surge al sustituir el número α por la fracción congruente p_n/q_n es menor que $1/q_n^2$, es decir,*

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}. \qquad (3.7)$$

▶ En realidad, de la propiedad 3 y la fórmula (3.6) se deduce que

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

Esta estimación es incómoda por el hecho de que en el proceso de aproximación $\alpha\approx p_n/q_n$ nos puede ser desconocida la siguiente fracción congruente. Por esta razón

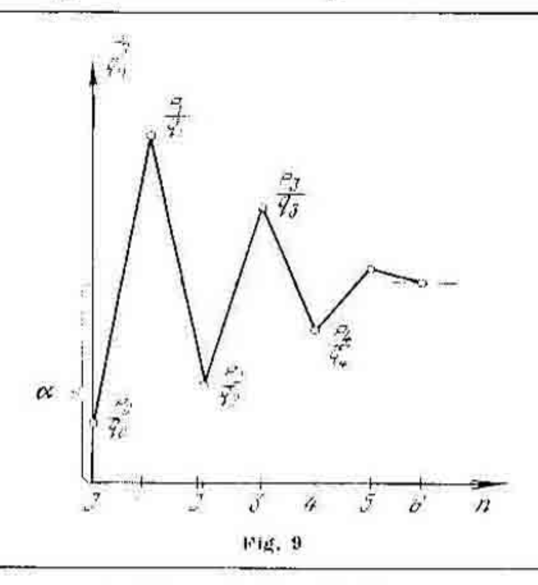


Fig. 9

sustituimos en la última desigualdad q_{n+1} por un número menor q_n, lo que conduce a la acentuación de la desigualdad. Así pues, la desigualdad (3.7) queda demostrada. ■

La propiedad 4 demuestra que las fracciones congruentes convienen mucho para la aproximación de números reales. Si la fracción p_n/q_n no fuera congruente podríamos esperar de la misma una exactitud solamente de hasta $1/2q_n$.

21. Irreductibilidad de las fracciones congruentes. Consideremos una propiedad más de las fracciones congruentes.

Propiedad 5. *Todas las fracciones congruentes son irreducibles.*

Recordemos que los numeradores y los denominadores de las fracciones congruentes se determinan por las fórmulas (3.1). Supongamos que la fracción p_n/q_n sea reducible, es decir, su numerador y su denominador tienen un factor común λ diferente de la unidad:

$$p_n = \lambda p'_n;$$
$$q_n = \lambda q'_n,$$

donde p'_n y q'_n son números naturales. Entonces la fórmula (+) nos brinda

$$\lambda (p_{n+1}q'_n - p'_n q_{n+1}) = (-1)^n.$$

Hemos obtenido una igualdad absurda: el primer miembro se devide entre λ, mientras que el segundo, no. Por lo tanto, la fracción p_n/q_n es irreducible.

Un conjunto de fracciones iguales entre sí contiene solamente una fracción irreducible. Por esta causa la fracción congruente puede definirse así: *se denomina congruente una fracción irreducible que expresa el valor de una fracción continua truncada.*

CAPÍTULO IV
FRACCIONES CONTINUAS INFINITAS

§ 7. NÚMEROS REALES

22. Abismo entre lo finito y lo infinito. Sabemos encontrar el valor de la fracción continua finita y esperamos que nuestro lector ya desee saber tratar las fracciones infinitas. Precisamente los deseos de tal índole contribuyen al progreso de la ciencia.

Todo número racional puede representarse en forma de una fracción continua finita. Y, al revés: toda fracción continua finita representa un número racional. Entonces ¿puede ser que logremos representar números irracionales mediante fracciones continuas infinitas?

Muchas nociones matemáticas, que conocemos en una variante finita, al mismo tiempo tienen análogos infinitos alentadores. Citemos unos cuantos ejemplos.

El sentido de una fracción decimal finita está completamente claro. Por ejemplo, 0,33 significa 33/100. ¿Y qué significa 0,333...[1])?

El valor de la suma de un número finito de términos también tiene un sentido comprensible. Por ejemplo, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$. ¿Y cómo se entiende la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$?

Existen polinomios finitos, por ejemplo, $1+2x+3x^2$. ¿Sería posible considerar «polinomios con un número infinito de términos» como $1+x+x^2+\ldots\ldots x^n+\ldots$?

Sin embargo, a pesar de su parecido exterior entre lo finito y lo infinito yace un abismo. Hasta el siglo XIX

---

[1]) Los puntos suspensivos constituyen un símbolo matemático de doble sentido. Los puntos suspensivos dentro de una fórmula significan que están omitidos ciertos elementos (por ejemplo, $1+x+x^2+\ldots+x^n$) y los puntos suspensivos al final de una fórmula (por ejemplo, $1+x+x^2+\ldots$) significan «etcétera hasta el infinito». También hay puntos suspensivos que sustituyen algunas filas.

los matemáticos no se daban cuenta del mismo. Sin comprender el peligro, seguían tratando los objetos infinitos del mismo modo que los finitos y, a veces, llegaban a obtener resultados absurdos. En el siglo XIX, poco a poco, aprendieron a tratar lo infinito y tendieron unos puentes sólidos por encima del abismo. Nosotros pasaremos por uno de ellos.

En lo que se refiere a los ejemplos aducidos, señalemos que una fracción decimal finita, por su sentido, no difiere de una fracción simple, ya que constituye solamente una forma singular de anotación. La fracción 0,33 tiene el numerador 33 y el denominador, 100. ¿Y cuál es el denominador de la fracción infinita 0,333...? Como resulta imposible contestar a esta pregunta, entonces está claro que una fracción decimal infinita no tiene el mismo sentido que la finita. N.N. Luzin decía, que aunque dibujemos el símbolo 0,333 ... no surge su sentido. Este símbolo no es más que un arabesco o un ornamento. No obstante, es posible *atribuirle* también cierto sentido.

De modo análogo, la suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ tiene sentido, porque se puede hallar su valor mediante la adición consecutiva: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Pero, resulta imposible hallar el valor de una suma infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ *mediante el mismo procedimiento*, ya que el proceso de adición consecutiva nunca podrá terminarse. No se debe considerar que se trata de una dificultad netamente técnica: es un obstáculo de principio. Sería imprudente tranquilizarse por el hecho de que al sumar sucesivamente los números $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$ hallamos *valores aproximados* de una suma infinita. No se puede buscar valores aproximados de algo que no existe. *En primer lugar*, hace falta determinar el sentido de una suma infinita y sólo *después de hacerlo* se podrá hablar acerca de sus valores aproximados.

A continuación entraremos en materia. Les recordamos que vamos a atravesar el abismo entre lo finito y lo infinito aprovechando uno (de los muchos existentes) de

los puentes. Este puente se denomina *principio de segmentos encajados o axioma de Cantor*.[1]

23. Principio de segmentos encajados. Decimos con frecuencia que una línea recta es *continua*. En las matemáticas siempre nos vemos obligados a buscar unas formulaciones lógicas a fin de sustituir representaciones intuitivas. El principio de segmentos encajados constituye un axioma que expresa precisamente esta propiedad de una recta, que se denomina *continuidad*.

Recordemos que se denomina *segmento* el conjunto de puntos de una recta, constituido por dos puntos diferentes a y b (denominados *extremos del segmento*) y todos los puntos comprendidos entre éstos. El segmento se designa mediante el símbolo $[a, b]$. El conjunto que comprende todos los puntos entre a y b, pero que no comprende los propios puntos a y b, se denomina *intervalo* y se designa mediante el símbolo (a, b). El intervalo (a, b) contiene dos puntos menos que el segmento $[a, b]$, no obstante, esta diferencia a veces resulta ser muy importante. Si ahora a un conjunto de puntos comprendidos entre a y b unimos uno de los extremos entonces obtendremos un *semiintervalo*. En el eje numérico podemos designar con la misma letra el punto y el número que le corresponde. Entonces, tenemos

$$\text{segmento } [a, b] : a \leqslant x \leqslant b;$$
$$\text{intervalo } (a, b) : a < x < b;$$
$$\text{semiintervalo } [a, b) : a \leqslant x < b;$$
$$\text{semiintervalo } (a, b] : a < x \leqslant b.$$

Examinemos en una recta una secuencia infinita de segmentos

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,$$

que posee dos propiedades: 1) cada segmento (a partir del segundo) está encajado en el anterior; 2) las longitudes de los segmentos tienden a cero (para $n \to \infty$).

[1]) George Cantor (1845—1918), gran matemático alemán, fundador de la teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos llegó a ser el fundamento de todas las matemáticas.

La primera propiedad significa: todos los puntos del segmento que tiene n-ésimo número pertenecen al segmento que tiene el $(n-1)$-ésimo número (fig. 10).

La segunda propiedad debe entenderse así: si fijamos con anticipación cualquier longitud ε, entonces le co-



Fig. 10

rresponde tal número n que el segmento $[a_n, b_n]$ tiene una longitud menor que ε (y los segmentos con números mayores tienen una longitud aún menor).

Dado este caso, existe un punto y solamente uno que pertenece a todos los segmentos.

Repitamos brevemente esta formulación.

Axioma de Cantor. *Si en una recta se da una secuencia infinita de segmentos que posee dos propiedades:* **1)** *cada segmento subsiguiente está encajado en el anterior;* 2) *las longitudes de los segmentos tienden a cero, entonces existe un punto y solamente uno que pertenece a todos los segmentos.*

Ahora esclareceremos este axioma más detalladamente. En la fig. 10 están representados unos cuantos primeros segmentos de nuestra secuencia. A cada paso del proceso [se denomina n-ésimo paso la transición del n-ésimo segmento al segmento $(n+1)$-ésimo] se excluyen algunos puntos. Por ejemplo, el punto A en la fig. 10 pertenece al primer segmento, pero no pertenece al segundo. Por lo tanto, el punto A será excluido durante el primer paso del proceso. El punto B queda intacto durante el primer paso, pero será excluido durante el segundo. El punto C queda intacto durante los primeros dos pasos, no obstante, se excluirá durante el tercer paso, etc. Cada punto del segmento $[a_1, b_1]$ tiene su propio destino. Habrán puntos pertenecientes al 1000-ésimo segmento, pero que no forman parte del 1001-ésimo segmento. Estos puntos en el transcurso del proceso queda-

rán intactos 1000 veces, sin embargo, serán excluidos durante el 1001-ésimo paso.

El principio de segmentos encajados afirma que existe un punto X que *nunca* será excluido, o sea, quedará intacto durante cualquier paso, es decir pertenece a *cualquier* segmento, independientemente de su número. Con otras palabras, pertenece a todos los segmentos.

La existencia de tal punto se establece por el axioma dado. Ahora la unicidad del mismo punto incluida en la formulación, para comodidad, puede demostrarse con facilidad. En realidad, supongamos que existieran dos puntos semejantes, X e Y. Designemos con la letra d la distancia entre dichos puntos. Según la condición, las longitudes de los segmentos de la secuencia dada tienden a cero. Hallemos tal número n para el cual la longitud del segmento $[a_n, b_n]$ sea menor que d

$$|a_n, b_n| < d.$$

Entonces el segmento $[a_n, b_n]$ no podrá cubrir el segmento $XY = d$, es decir, los puntos X e Y no pueden pertenecer al segmento $[a_n, b_n]$ (tampoco, al segmento que le sigue). Por lo tanto, se ha demostrado que no puede haber dos puntos que pertenezcan *a todos* los segmentos.

Ejemplo 1. En el eje numérico analicemos los segmentos

$$[0, 1], \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right], \left[\frac{7}{16}, \frac{9}{16}\right], \ldots, \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right], \ldots$$

Está claro que el punto $1/2$ (y únicamente este punto) pertenece a todos estos segmentos.

Ejemplo 2. Está dada una secuencia de segmentos

$$[0, 1], \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[0, \frac{1}{n}\right], \ldots$$

El punto 0 (y únicamente este punto) pertenece a todos estos segmentos.

En cada uno de estos ejemplos nos encontramos con cierta secuencia concreta de segmentos encajados. En cada uno de ellos resulta fácil indicar el punto único que pertenece a todos los segmentos. Pues, el principio de

segmentos encajados confirma que tal punto existe *siempre* (sea cual fuera la ley de formación de la secuencia con tal que sean satisfechas las dos condiciones mencionadas).

Observación. Si en el ejemplo 2 hubiéramos examinado la secuencia de intervalos

$$(0, 1),\ \left(0, \frac{1}{2}\right),\ \left(0, \frac{1}{3}\right), \ldots \left(0, \frac{1}{n}\right), \ldots$$

entonces, a pesar de que son encajados y sus longitudes tienden a cero, no existe un punto que pertenece a todos estos intervalos. Pues el punto 0 no pertenece a ninguno de estos intervalos y cualquier otro punto del intervalo (0, 1) será excluido durante algún paso.

Entonces, es de gran importancia el hecho de que en el axioma de Cantor se trata de *segmentos*. Para los intervalos semejante afirmación es errónea.

El principio de segmentos encajados expresa la continuidad de la recta: en aquel lugar al que se arrastran los segmentos siempre resulta encontrarse un punto y no vacío. Intentemos violar la continuidad de la recta haciendo un agujero en el punto $\frac{1}{2}$. Con otras palabras, eliminemos de la recta el punto $\frac{1}{2}$. El conjunto de puntos M que ha quedado ya no puede denominarse recta. Constituye un conjunto de llamados rayos abiertos (es decir rayos sin vértice): $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Examinemos la secuencia de segmentos como en el ejemplo 1. Ahora no son *segmentos de una recta*, ya que les falta un punto, sino que segmentos en el conjunto M. Cada segmento tiene dos extremos y todos los puntos del conjunto M comprendidos entre éstos. Aunque estos segmentos son encajados y sus longitudes tienden a cero, no existe un punto del conjunto M que pertenezca a todos estos segmentos. *El principio de segmentos encajados para el conjunto M no es válido.*

24. Conjunto de números racionales. Sigamos cómo el eje numérico va llenándose poco a poco con números. Primero, marcamos los números enteros. El conjunto de todos los números enteros suele designarse con **Z**. No se requieren razonamientos finos para convencerse de que

los puntos del conjunto Z no llenan la recta enteramente: entre los puntos enteros vecinos hay un macizo continuo de puntos (intervalo) por ahora anónimos.

Ahora empecemos a marcar los números racionales. Basta con marcar todos los números racionales comprendidos entre 0 y 1. Luego, al desplazar el segmento [0, 1] en un número entero de unidades a la izquierda y a la derecha, obtendremos todos los puntos racionales en la recta.

Abarcaremos los números racionales en el segmento [0, 1] según el orden que sigue:

Paso 1. Marcamos las fracciones cuyo denominador es igual a 2. Existe solamente una fracción que satisface a esta condición: $\frac{1}{2}$

Paso 2. Marcamos las fracciones con el denominador igual a 3, disponiéndolas en el orden de crecimiento de los numeradores: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

Paso 3. Marcamos las fracciones con el denominador igual a 4, disponiéndolas en el orden de crecimiento de los numeradores: $\frac{1}{4}, \left(\frac{2}{4}\right), \frac{3}{4}$. La fracción $\frac{2}{4}$ está escrita entre paréntesis porque este número ya aparecía antes.

. . . .

Paso $(n-1)$. Marcamos las fracciones cuyo denominador es igual a n, disponiéndolas en orden creciente de los numeradores:, $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$. Si entre éstas se encuentran reducibles, podemos tacharlas.

. . . .

Este proceso es infinito. No podemos terminarlo pero podemos afirmar que prevé la inclusión de *todos* los números racionales comprendidos entre 0 y 1. Efectivamente ¿es que existe acaso una fracción a la cual nunca le llegará su turno? Tomamos cualquier fracción comprendida entre 0 y 1, por ejemplo $\frac{37}{89}$. Está claro que marcando las fracciones con el denominador igual a 2, 3, 4, . . ., alguna vez (para precisar: durante el paso 88) llegaremos al denomiandor 89. Luego, al disponer las fracciones en

orden creciente de sus numeradores $\frac{1}{89}$, $\frac{2}{89}$, $\frac{3}{89}$, etc., obligatoriamente llegaremos a la fracción $\frac{37}{89}$. De tal modo, cualquiera que sea la fracción escogida entre 0 y 1, en el transcurso del proceso, llegaremos obligatoriamente a la misma, y la marcaremos en el segmento [0, 1]. Si se supone que el proceso ha finalizado entonces en el segmento [0, 1] serán marcados todos los puntos racionales (puntos que representan números racionales). Desplazando estos puntos a 1, 2, 3, . . . unidades a la derecha y

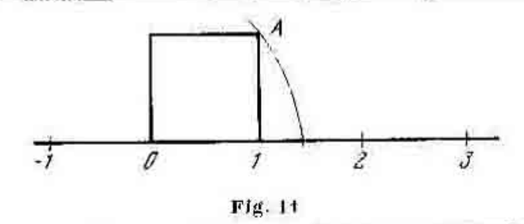


Fig. 11

a la izquierda, marcaremos en el eje numérico todos los puntos racionales de la recta, o sea, *todos* los números racionales. El conjunto de todos los números racionales (o el conjunto de todos los puntos racionales del eje numérico) siempre lo designaremos mediante **Q**.

25. Existencia de puntos no racionales en una recta. ¿Llenarán los puntos del conjunto **Q** toda la recta? Resulta que no: en la recta hay puntos que no pertenecen a **Q** (no racionales). No obstante, este hecho no es tan evidente como para el caso del conjunto **Z**, por lo cual para contestar a esta pregunta se requieren razonamientos finos. A Pitágoras se le atribuye el siguiente descubrimiento genial: no existe un número[1] cuyo cuadrado sea igual a 2 (o, lo que es lo mismo, la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado). Si en el eje numérico (fig. 11) tenemos marcados todos los puntos racionales, entonces el arco de la circunferencia, cuyo radio es la diagonal del cuadrado *OA*, atravesará libremente el conjunto **Q** en la recta numérica sin intersecarse con el mismo.

[1]) Un número racional. No lo estipulamos ya que suponemos que hasta ahora no conocemos otros números.

No obstante, el conjunto Q se dispone en el eje numérico *en todas las partes muy apretadamente*. Esto significa: todo segmento de la recta, por muy pequeño que sea, contiene puntos racionales. De tal manera, aunque los puntos racionales no llenan la recta enteramente, en la misma no hay segmentos totalmente libres de estos puntos. Resulta muy fácil demostrarlo al acordarse del proceso de inclusión de los puntos racionales en el segmento [0, 1].

Vamos a considerar las secuencias de segmentos encajados

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

en el conjunto Q (es decir, los extremos de estos segmentos son puntos racionales). *El principio de segmentos encajados en el conjunto* Q *no es válido*. Incluso si se observan las condiciones del axioma de Cantor a pesar de todo podrá no existir el punto (del conjunto Q) que pertenezca a todos estos segmentos. A continuación veremos que este hecho puede utilizarse para la creación de nuevos números, o sea, irracionales.

26. Fracciones decimales infinitas. Atribuyamos al símbolo de una fracción decimal infinita el siguiente sentido: una fracción decimal infinita es una secuencia de segmentos encajados en el conjunto Q. Al interrumpir esta fracción, por turno, después de cada signo decimal[1] obtendremos los extremos izquierdos de estos segmentos. Al añadir cada vez la unidad del último orden, obtendremos los extremos derechos. Por ejemplo, la fracción 0,313131... significa la siguiente secuencia de segmentos encajados del conjunto Q:

$$[0,3; 0,4], [0,31; 0,32], [0,313; 0,314], \ldots$$

En todos los casos (es decir, para cualquier fracción decimal) las longitudes de estos segmentos disminuyen en 10 veces como resultado de cada paso y, por lo tanto, tienden a cero.

Consideremos ahora dos ejemplos aparentemente parecidos, pero, al mismo tiempo, muy diferentes.

---

[1]) Se llaman signos decimales las cifras que siguen a la coma.

Ejemplo 1. Una fracción periódica infinita 0,333... significa la siguiente secuencia de segmentos encajados:

[0,3; 0,4], [0,33; 0,34], [0,333; 0,334], ...

¿Existirá un punto que pertenezca a todos estos segmentos? En el presente caso y a continuación se trata de si existiera tal punto en el conjunto Q. La existencia de tal punto en la recta no da lugar a dudas.

En el ejemplo dado este punto existe: es el punto $x=\frac{1}{3}$.

Tienen lugar las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3<\frac{1}{3}<0{,}4; \\ 0{,}33<\frac{1}{3}<0{,}34; \\ 0{,}333<\frac{1}{3}<0{,}334; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Por esta causa el número $\frac{1}{3}$ se considera como el valor de la fracción decimal infinita 0,333... A continuación ofreceremos la definición directa de esta noción, mientras tanto examinaremos el segundo ejemplo.

Ejemplo 2. Formemos dos secuencias: a) la máxima fracción decimal con signos decimales 0, 1, 2, . . ., n, . . cuyo cuadrado es menor que 2; b) la mínima fracción decimal con signos decimales 0, 1, 2, . . ., n . . . cuyo cuadrado es mayor que 2.

Hallamos sucesivamente

$$\begin{array}{ll} 1^2<2, \text{ pero } & 2^2>2; \\ 1{,}4^2<2, \text{ pero } & 1{,}5^2>2; \\ 1{,}41^2<2, \text{ pero } & 1{,}42^2>2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Podemos continuar este proceso infinitamente. ¿Existirá en el conjunto Q un punto que pertenezca a todos slos segmentos

[1; 2], [1,4; 1,5], [1,41; 1,42], ...?

En otras palabras, existirá un número racional x que satisfaga todas las desigualdades

$$\left.\begin{array}{c} 1\leqslant x\leqslant 2; \\ 1{,}4\leqslant x\leqslant 1{,}5; \\ 1{,}41\leqslant x\leqslant 1{,}42; \end{array}\right\} \qquad (**)$$

[Señalemos que ponemos el signo $\leqslant$ (y no $<$) ya que estamos buscando un punto que pertenezca *al segmento*, es decir, que posiblemente coincida con uno de sus extremos. En el ejemplo 1, por casualidad, el número siempre resulta *dentro* de los segmentos. Si hubiéramos tomado la fracción 0,2000... que corresponde al número $\frac{1}{5}$ entonces nos veríamos obligados a usar el signo $\leqslant$.]

Es bien conocido que tal número no existe, lo que significa que para *cualquier* número racional las desigualdades (**), a partir de cierta fila, no son válidas. Al mismo tiempo esto significa que la respectiva fracción decimal infinita 1,4142136... que se determina por el proceso anteriormente descrito, no tiene sentido.

Ha llegado el momento de atribuirle el sentido que no tenía antes.

27. Introducción de números irracionales. Observamos que el número $\frac{1}{3}$ puede entenderse de diferente manera: a) como una fracción $\frac{1}{3}$, es decir, la razón de los números naturales 1 y 3; b) como una fracción decimal infinita 0,333..., o sea, como el punto común de segmentos encajados

$$[0{,}3;\ 0{,}4],\ [0{,}33;\ 0{,}34],\ [0{,}333;\ 0{,}334],\ \ldots$$

Para el número x que buscamos en virtud de las desigualdades (**) el primer procedimiento no sirve. Sin embargo, a este numero le corresponde una fracción decimal infinita, o sea, un sistema de segmentos encajados

$$[1;\ 2],\ [1{,}4;\ 1{,}5],\ [1{,}41;\ 1{,}42],\ \ldots$$

Se puede convenir en que esta fraccion decimal infinita o (lo que es lo mismo) este sistema de segmentos encajados *determina* un número. Un número de tipo nuevo: no puede representarse por la razón de números naturales. Tal número se denomina *irracional*.

Volvemos a esclarecer la idea de introducción de números irracionales.

La secuencia infinita de segmentos encajados (*) determina un número. Este número resultó racional: 1/3. Podemos operar con el mismo aun sin analizar la secuencia (*).

La secuencia infinita de segmentos encajados (**) también determina un número, pero lo desconocíamos antes (se supone que conocíamos solamente los números racionales) y apareció únicamente en forma de la secuencia (**).

28. **Números reales.** Los números racionales e irracionales tienen una denominación común: *números reales* Con otras palabras, el conjunto de números reales **R** representa la unión de conjuntos de números racionales e irracionales.

Al generalizar la noción de número, los números viejos no deben contraponerse a los nuevos, sino que hace falta considerarlos como un caso particular de una noción amplia. Con otras palabras, debe existir un principio único de formación y un procedimiento único de designación de todos los números reales.

El procedimiento único de designación (el mismo constituye el procedimiento de formación) corresponde a las fracciones decimales infinitas.

Verdad que, algunos números racionales pueden representarse en forma de una fracción decimal finita. No obstante, a fin de tener un procedimiento único de designación apto para todos los números reales, convenimos en transformar cada fracción decimal finita en infinita. Señalemos que es posible hacerlo mediante dos procedimientos. Por ejemplo,

$$0{,}5 = 0{,}5000\ldots;$$
$$0{,}5 = 0{,}4999\ldots$$

Para que cada número real sea representado por una fracción decimal infinita mediante un solo procedimiento, llegamos al siguiente acuerdo:

Acuerdo. Se prohíbe usar las fracciones decimales infinitas con la cifra 9 en calidad de período.

Ahora el número 0,5 puede escribirse en forma de la fracción decimal infinita solamente así: 0,5000...

Después de este convenio, cada número real es representado únicamente por una fracción decimal infinita, es decir, dos fracciones decimales infinitas diferentes no pueden representar un mismo número real.

Subrayemos que según nuestra definición el número real es precisamente una fracción decimal infinita. Algunos números reales pueden representarse también por otros procedimientos. Por ejemplo, los números racionales pueden representarse en forma de fracciones simples. Las raíces de números naturales se designan $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt[3]{2}$, . . . Por fin, algunos números tienen designaciones individuales («personales»): π, e, etc. En resumidas cuentas, la fracción decimal infinita es un procedimiento universal de representación y designación de cualquier número real.

Este procedimiento de introducción de números reales no origina el conjunto **R** de nada. Tiene previsto que ya existe cierto subconjunto **R**, o sea, precisamente el conjunto de todas las fracciones decimales finitas. El procedimiento que acabamos de exponer permite *completar* dicho conjunto hasta **R** al usar los segmentos encajados cuyos extremos son representados por fracciones decimales finitas. También se puede determinar los números reales de otra manera, utilizando como conjunto inicial no el conjunto de fracciones decimales finitas, sino cualquier otro conjunto *denso en todas las partes* de la recta.

Que no piense el lector que ya hemos construido la teoría de los números reales. La definición de número real anteriormente mencionada constituye sólo el primer paso. Para construir la teoría tendríamos que dar aun muchos pasos, en particular, ordenar los números reales (es decir, señalar el procedimiento de su comparación según el valor) y determinar las operaciones con los mismos (adición, multiplicación, etc.). No obstante, no seguiremos este camino. El objetivo del presente párrafo consiste en esclarecer el principio de segmentos encajados que se utilizará para interpretar las fracciones continuas infinitas.

29. Representación de números reales en el eje numérico. Sea dado un número real positivo

$$x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \qquad (***)$$

Es una anotación decimal. Aquí α_0 es cualquier número entero no negativo y los restantes α_i son las cifras desde 0 hasta 9. La fracción decimal finita

$$\underline{x}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

que se obtendrá si en la notación (***) desechamos todas las cifras partiendo de α_{n+1} se denomina *valor aproximado del número x con n signos decimales con defecto*. Si ahora adicionamos la unidad del último orden

$$\overline{x}_n = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n},$$

entonces obtendremos *el valor aproximado del número x con n signos decimales con exceso*. Señalemos que la adición de la unidad del último orden puede (para $\alpha_n = 9$) variar la estructura digital precedente a α_n. Por ejemplo, para el número

$$0{,}99111 \ldots \underline{x}_2 = 0{,}99,\ \overline{x}_2 = 1{,}00.$$

Anotemos sin entrar en argumentación lógica las siguientes desigualdades naturales:

$$\underline{x}_n \leqslant x < \overline{x}_n.$$

Una pregunta al lector. ¿Por qué en el primer caso ponemos el signo $\leqslant$ mientras que en el segundo, el signo $<$? ¿Podrá ser al revés (dado el caso de ciertos cambios en las definiciones anteriores)?

Ahora podemos establecer un hecho de gran importancia: *si marcamos todos los números reales en el eje numérico, entonces estará repleta por todas las partes*. A continuación lo formularemos con mayor precisión y lo demostraremos.

Teorema 1. *A cada número real le corresponde un punto único del eje numérico.*

▶ Sea dado un número real positivo $x = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ Este número debe pertenecer a la secuencia infinita de segmentos encajados

$$[\underline{x}_0, \overline{x}_0],\ [\underline{x}_{-1}, \overline{x}_1],\ [\underline{x}_{-2}, \overline{x}_2],\ \ldots$$

Las longitudes de dichos segmentos forman una progresión geométrica con el denominador $\frac{1}{10}$. De acuerdo

con el axioma de Cantor en la recta hay un punto único que pertenece a todos los segmentos mencionados. Precisamente este punto corresponde al número x. ■

Teorema 2. *A cada punto del eje numérico le corresponde un número real único.*

▶Sea dado en el eje numérico un punto x (no más a la izquierda que el cero). Si x es un número entero, entonces todo terminará con ello. Si no lo es, entonces x se encuentra entre los números enteros vecinos α_0 y $\alpha_0 + 1$. Comencemos la notación decimal del número x:

$$x = \alpha_0, \ldots$$

Dividamos el segmento $[\alpha_0; \alpha_0 + 1]$ en 10 partes iguales. Si x no coincide con ninguno de los puntos de división, entonces resultará comprendido entre α_0, α_1 y $\alpha_0, \alpha_1 + 0{,}1$. Continuemos la notación decimal del número x:

$$x = \alpha_0, \alpha_1 \ldots$$

y dividamos el segmento $[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 0{,}1]$ en 10 partes iguales.

Si en cierto paso de este proceso el punto x coincide con algún punto de división, entonces

$$x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 000 \ldots$$

Si no se observe nunca la coincidencia mencionada, entonces

$$x = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots,$$

con la particularidad de que x se encuentra *estrictamente dentro* de todos los segmentos $\underline{x}_n, \overline{x}_n$ (para $n = 0, 1, 2, \ldots$). ■

Corolario. *En el conjunto* **R** *tiene lugar el principio de segmentos encajados.*

30. Condición de la rasionalidad de una fracción décimal infinita. Como conocemos del curso escolar de las matemáticas *todo número racional* se representa mediante una fracción decimal periódica (simple o mixta). Por ejemplo

$$\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots; \ \frac{13}{90} = 0{,}1444 \ldots; \ \frac{1}{5} = 0{,}2000 \ldots$$

Al contrario, *toda fracción decimal periódica expresa un número racional.*

De estas tesis se deduce que *todo número irracional se representa por una fracción decimal infinita aperiódica.* Por ejemplo, al usar el conocido algoritmo para extraer la raíz cuadrada, podemos obtener cualquier número de cifras de la fracción decimal que representa $\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

Siempre podemos hallar un signo decimal más. Aunque desconocemos la ley formal de formación de esta secuencia de cifras (o sea, no podemos indicar la función $\varphi(n)$ que expresa el n-ésimo signo decimal) estamos seguros de que esta fracción es aperiódica.

Al contrario, *toda fracción decimal aperiódica representa un número irracional.* Tomemos, por ejemplo, la fracción

$$0{,}1010010001\ldots$$

(el número de ceros entre dos unidades consecutivas cada vez aumenta en una unidad). Esta fracción es aperiódica y, por consiguiente, su valor es un número irracional. Aquí la ley formal de secuencia de cifras resulta ser muy sencilla: si u_n es el n-ésimo signo decimal, entonces

$$u_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es un número que tiene el aspecto } \dfrac{k(k+1)}{2}; \\ 0, & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

§ 8. FRACCIONES CONTINUAS INFINITAS

31. Valor numérico de una fracción continua infinita. Al interrumpir una fracción continua infinita $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ alternativamente después de cada elemento, vamos a obtener fracciones congruentes consecutivas:

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0]; \ \frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1], \ \ldots, \ \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots a_n]; \ \ldots$$

A pesar de que la fracción continua infinita es solamente un símbolo, al que no se ha atribuido un valor numérico, las fracciones congruentes son, en esencia, números racionales. Determinan una secuencia infinita de segmentos encajados

$$\left[\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}\right], \left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right], \left[\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}\right], \ldots, \left[\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right], \ldots \qquad (4.1)$$

Ya señalemos que los denominadores de las fracciones congruentes crecen rigurosamente [véanse las fórmulas (3.2)]

$$q_0 \leqslant q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$$

Como todos los q_n son números naturales, entonces crecen infinitamente:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \infty.$$

Pero, en este caso, de la fórmula (3.6) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \Delta n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) = 0.$$

La diferencia entre las fracciones congruentes vecinas tiende a cero.

En las formulaciones de esta índole siempre se sobreentiende que $n \to \infty$.

Cada segmento (4.1) está encajado en el anterior (véase la fig. 8). De acuerdo con el axioma de Cantor existe un punto único de la recta o, con otras palabras, un número real único que pertenece a todos estos segmentos. *Precisamente este número, según la definición, lo consideraremos como el valor de la fracción continua infinita.*

De esta definición sigue:

1. *El valor de una fracción continua infinita está comprendido entre dos cualesquiera fracciones congruentes vecinas.*

2. *Todas las fracciones congruentes con índices pares son, en esencia, valores aproximados de una fracción continua infinita con defecto, y con índices impares, de una fracción continua infinita con exceso.*

Volvamos a examinar la fig. 9. Dado el caso de una fracción continua infinita, la quebrada no tiene el último eslabón, cuyo extremo yace en la línea punteada. Esta quebrada tiene un sinnúmero de vértices que se encuentran alternativamente, ora por abajo, ora por encima de la recta punteada; α es el valor de la fracción continua infinita.

3. *La secuencia de fracciones congruentes con índices pares*

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \ldots, \frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \ldots$$

crece monótonamente y a la izquierda tiende hacia α. La secuencia de fracciones congruentes con índices impares

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_5}{q_5}, \ldots, \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}, \ldots$$

decrece monótonamente y a la derecha tiende hacia α.

Miremos fijamente la secuencia de segmentos (4.1). Los extremos de los mismos son números racionales. En la notación de estos segmentos el primer lugar ocupa ora el extremo izquierdo ora el derecho. Por supuesto, esto no tiene importancia de principio.

32. Representación de un número irracional mediante una fracción continua infinita. En primer lugar, nos familiarizamos con el algoritmo del desarrollo de un número real en fracción continua. Supongamos que al aplicar este algoritmo al número α (irracional) obtenemos una fracción continua infinita $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Ya dijimos anteriormente que al número α le *corresponde* esta fracción continua:

$$\alpha \sim [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Ahora ya hemos aprendido a determinar el valor numérico de la fracción continua infinita. Surge una pregunta natural: ¿el valor numérico $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ es precisamente α o cualquier otro? Con otras palabras ¿será simétrica la correspondencia entre α y $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$?

¡Sí!

Esto se deduce del hecho de que en el proceso de desarre dollo α en una fracción continua se obtienen frac-

ciones congruentes que son alternativamente ora menores ora mayores que α. Consideremos, por ejemplo, los primeros dos pasos del proceso:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_1},$$

de donde

$$a_0 < \alpha.$$

Luego,

$$x_1 = \frac{1}{\alpha - a_0} = a_1 + \frac{1}{x_2},$$

de aquí se desprende

$$\frac{1}{\alpha - a_0} > a_1, \quad \alpha - a_0 < \frac{1}{a_1}, \quad \alpha < a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

De tal modo

$$a_0 < \alpha < a_0 + \frac{1}{a_1}$$

o, de otra manera,

$$\frac{p_0}{q_0} < \alpha < \frac{p_1}{q_1}.$$

Podemos seguir continuando este razonamiento, o sea, α está comprendido entre cualesquiera dos fracciones congruentes vecinas.

Si quisiéramos, operando en dirección contraria, hallar el valor de la fracción continua infinita obtenida, entonces tendríamos que recordar: *este valor, según la definición, representa el punto común de todos los segmentos* (4.1), es decir, *de todos los segmentos comprendidos entre las fracciones congruentes vecinas.*

No obstante, existe un único punto perteneciente a todos los segmentos (4.1). Por consiguiente, el número α y el valor de la fracción continua infinita $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ coinciden. De aquí y en adelante en lugar del signo $\sim$ podemos escribir el signo $=$:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

33. Uniformidad de la representación de un número real mediante una fracción continua. ¿Constituyen las

fracciones continuas un procedimiento universal para representar los números reales? Esto significa: ¿es posible afirmar que cada número real[1]) puede representarse mediante una fracción continua y además, por el único medio posible?

Ya hemos dado la respuesta a la primera parte de la pregunta. Todo número real puede desarrollarse en fracción continua. Un número racional se desarrolla en fracción continua finita, mientras que un número irracional, en infinita. Queda por solucionar aun el problema de unicidad.

En primer lugar meditaremos sobre el ejemplo que sigue:

$$\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+1}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}$$

o en designaciones abreviades

$$[0;\ 6,\ 4]=[0;\ 6,\ 3,\ 1].$$

Tal transformación (la separación de la unidad del último elemento) puede tener lugar para cualquier fracción continua en la cual el último elemento difiere de la unidad. Si el último elemento es igual a unidad, entonces él puede ser adicionado al penúltimo (con otras palabras, se puede leer el último ejemplo de derecha a izquierda).

Resulta fácil demostrar que ésta es la *única* causa de la multiformidad de la representación de un número racional (positivo) mediante una fracción continua. Eliminaremos esta causa al convenir en que *el último elemento de la fracción continua no debe ser igual a la unidad.* A partir de este momento, de los dos procedimientos de notación de un mismo número [0; 6, 4] y [0; 6, 3, 1] *nos vemos obligados* a escoger el primero.

Ahora podemos demostrar que: *dos fracciones continuas* $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$ y $[b_0;\ b_1,\ b_2,\ \ldots]$ (*finitas o infini-*

[1]) Para simplificar, desarrollamos los razonamientos para los números positivos. No obstante, está claro que la respuesta a la pregunta planteada, cualquiera que sea, no puede variar si se tratara de números negativos

tas) son iguales entre sí solamente en el caso si, primero, tienen igual número dee elementos y, segundo, sus respectivos elementos coinciden, es decir, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, etc.

La condición «tienen igual número de elementos» debe entenderse así: ora ambas fracciones son finitas y tienen igual número de elementos, ora las dos son infinitas.

▶ Designemos mediante α el valor de dos fracciones continuas iguales (desconocemos si cada una de las mismas es finita o infinita):

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] = [b_0;\ b_1,\ b_2,\ \ldots].$$

El elemento a_0 (así como b_0) es $E(\alpha)$[1]) y, por consiguiente, se define unívocamente por el valor de α. Por lo tanto,

$$a_0 = b_0.$$

Restemos a_0 de α

$$\alpha - a_0 = [0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots] = [0;\ b_1,\ b_2,\ \ldots].$$

Consideremos el valor inverso

$$\frac{1}{\alpha - a_0} = [a_1;\ a_2,\ \ldots] = [b_1;\ b_2,\ \ldots].$$

El elemento a_1 (al igual que b_1) es $E\left(\frac{1}{\alpha - a_0}\right)$ y, por lo tanto, se determina unívocamente por el valor $\frac{1}{\alpha - a_0}$. Entonces,

$$a_1 = b_1,$$

etc., etc. Repitiendo este razonamiento demostraremos que $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, etc.

¿Puede ser desigual el número de elementos de fracciones continuas iguales? Supongamos que la primera fracción continua es finita y tiene s elementos, mientras que la segunda ora es finita y tiene t elementos, donde

[1]) La función $E(\alpha)$ se determina así: «El máximo número entero que no supera a α». Por ejemplo, $E\left(\frac{5}{2}\right) = 2$, $E(1) = 1$, $E\left(-\frac{5}{2}\right) = -3$. La designación $E(\alpha)$ se lee «parte entera de α», la letra E es la primera letra de la palabra francesa *entier* (entero).

$t > s$, ora es infinita. Esto significa que

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_s}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_s + \cfrac{1}{b_{s+1} + \ddots}}}$$

o bien

$$a_s = a_s + \cfrac{1}{b_{s+1} + \ddots},$$

de donde

$$\cfrac{1}{b_{s+1} + \ddots} = 0,$$

lo que resulta imposible. Por consiguiente, $t = s$.

Así pues, todo número real se representa mediante una fracción continua y, además, del único modo posible. ■

En esta demostración hicimos uso de una regla que con frecuencia resulta ser útil. Para obtener el desarrollo $1/\alpha$, disponiendo del desarrollo en fracción continua (finita o infinita) del número α, hace falta:

1) si $a_0 \neq 0$, desplazar todo el «peine» a un paso a la derecha, y en lugar de los enteros, escribir cero;

2) si $a_0 = 0$, desplazar todo el «peine» a un paso a la izquierda.

Ejemplos.

$$\alpha = [3; 1, 2, 5], \quad \frac{1}{\alpha} = [0; 3, 1, 2, 5];$$

$$\beta = [0; 2, 2, 2, \ldots], \quad \frac{1}{\beta} = [2; 2, 2, \ldots].$$

Para la demostración basta con mirar fijamente las siguientes fracciones continuas:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} = [a_0; a_1, a_2 \ldots];$$

$$\frac{1}{\alpha} = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + a_2 + \ddots}} = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots].$$

§ 9. NATURALEZA DE LOS NÚMEROS REPRESENTADOS POR FRACCIONES CONTINUAS

34. Clasificación de las irracionalidades. Ya sabemos el siguiente hecho de importancia: *todo número racional se representa por una fracción continua finita, y el irracional, por una infinita.*

En lo que se refiere a los números racionales, no tenemos nada que añadir. Al mismo tiempo, los números irracionales por su naturaleza son muy diversos. Nos familiarizaremos con su clasificación.

La ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (4.2)$$

donde $a_0 \neq 0$ se denomina *ecuación algebraica de n-ésimo grado.* Vamos a analizar solamente el caso cuando todos los coeficientes de la ecuación (4.2) son racionales o incluso enteros, lo que es lo mismo. Siendo los coeficientes de la ecuación fraccionarios podemos multiplicar ambos miembros por el denominador común de estos coeficientes fraccionarios y obtendremos una ecuación con coeficientes enteros equivalente a la inicial.

Así pues, de aquí y en adelante, al examinar la ecuación (4.2) vamos a suponer que sus coeficientes son números enteros (positivos, negativos o nulos). Al coeficiente mayor se le aplica una condición adicional, $a \neq 0$.

El número real α se denomina número algebraico de n-ésimo grado si sirve de raíz de la ecuación algebraica de n-ésimo grado con coeficientes enteros y no sirve de raíz para ninguna ecuación algebraica de grado inferior con coeficientes enteros.

Ejemplo 1. Todo número racional p/q constituye un número algebraico de primer grado, ya que sirve de raíz de la ecuación

$$qx - p = 0.$$

Ejemplo 2. El número $\sqrt{2}$ es un número algebraico de segunda potencia, porque sirve de raíz de la ecuación

$$x^2 - 2 = 0.$$

Al mismo tiempo $\sqrt{2}$ no puede servir de raíz para la ecuación de primer grado con coeficientes enteros a causa de que tal ecuación ($a_0x + a_1 = 0$) tiene por raíz un número racional $x = -\frac{a_1}{a_0}$.

Un número algebraico de segunda potencia se denomina también *irracionalidad cuadrática.*

Resulta que existen números no algebraicos que se denominan *trascendentes.*

He aquí su definición: *un número real α se denomina trascendente si no sirve de raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.*

No es fácil descubrir la existencia de números trascendentes. Para demostrar que el número α es algebraico, es suficiente indicar una ecuación algebraica con coeficientes enteros de cuya raíz sirve α. Si no podemos hallar semejante ecuación esto no significa que α es trascendente: hace falta demostrar que tal ecuación no existe. Esta tarea por primera vez fue resuelta por el matemático francés J. Liouville en 1844. Demostró la trascendencia de algunos números reales concretos. En 1882 el matemático alemán F. Lindemann demostró que el número π es trascendente. En la actualidad, ya se conocen muchos ejemplos de números trascendentes. Por ejemplo, los logaritmos decimales de todos los números racionales, excepto los números del tipo 10^n, son trascendentes.

Advertimos al lector con respecto de la posible equivocación. Del hecho de que los ejemplos de números trascendentes se encuentran con dificultad no se deduce que dichos números sean poco frecuentes. ¡Al revés! Según demostró el citado George Cantor, *en cierto sentido* (en el presente folleto no podemos explicar exactamente de que se trata) casi todos los números reales son trascendentes, es decir, los números algebraicos constituyen una excepción rara. No obstante, a causa de que la naturaleza de los números algebraicos es más simple, sus ejemplos se aducen fácilmente en abundancia; al mismo tiempo resulta ser muy difícil la demostración de la trascendencia de cada número aparte[1]).

[1]) Verdad que existe un procedimiento sencillo de construcción de fracciones continuas cuyo valor es trascendente. Sin embargo, si se trata de la determinación de la trascendencia

35. Irracionalidades cuadráticas. Del punto anterior sabemos que *se denomina irracionalidad cuadrática un número irracional que sirve de raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.*

La palabra «irracional» sustituye la condición que figura en la definición precedente, o sea, «y no sirve de raíz de ninguna ecuación algebraica de grado inferior con coeficientes enteros». En nuestro caso esto significa «no sirve de raíz de ninguna ecuación de primer grado con coeficientes enteros», es decir, *no es un número racional.*

Examinemos la ecuación cuadrática

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0,$$

donde a_0, a_1, a_2 son números enteros y $a_0 \neq 0$. Sus raíces pueden hallarse valiéndose de la fórmula

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

Para que estas raíces sean irracionalidades cuadráticas es necesario y suficiente observar dos condiciones:

1) el discriminante $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ no debe ser negativo. Para $D < 0$ las raíces no sean números reales;

2) el discriminante D no debe representar un cuadrado perfecto. Para $D = N^2$ las raíces sean racionales.

Tomando en consideración estas dos condiciones se puede formular otra definición de irracionalidad cuadrática: *se denomina irracionalidad cuadrática un número que tiene el aspecto* $p + q\sqrt{D}$, *donde* p *y* q *son números racionales y* D *es un número natural que no representa un cuadrado perfecto.*

Para analizar algunos ejemplos vinculados con las irracionalidades cuadráticas preparemos cuatro lemas útiles. Para evitar repeticiones primero convengamos en ciertos designaciones y términos.

Con letras latinas minúsculas p, q, . . . siempre designaremos números *racionales*, positivos, negativos o cero. En particular, también pueden ser enteros.

Con letras latinas mayúsculas D, M, N, . . . designaremos *números naturales que no representan cuadrados perfectos*: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 . . .

---

de un número ya definido mediante otro procedimiento (π, log 2, sen 1, etc.) siempre resulta muy difícil hacerlo.

Los radicales cuadrados[1]) $\sqrt{M}$ y $\sqrt{N}$ se denominan *semejantes* si $\sqrt{N} = p\sqrt{M}$. De lo contrario, es decir si $\sqrt{N}/\sqrt{M}$ no es un número racional, los radicales $\sqrt{M}$ y $\sqrt{N}$ no son semejantes. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son semejantes, mientras que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$ no lo son.

Si $\sqrt{M}$ y $\sqrt{N}$ no son radicales semejantes, entonces $\sqrt{MN}$ también es un radical (es decir, MN es un cuadrado no perfecto) y además no es semejante a cada uno de estos radicales. Esto se deduce de las identidades

$$\sqrt{MN} = N\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{N}} \text{ (no es un número racional)};$$

$$\frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{M}} = \sqrt{N}, \quad \frac{\sqrt{MN}}{\sqrt{N}} = \sqrt{M}.$$

Lema 1. *Si* $\sqrt{M}$ *y* $\sqrt{N}$ *son radicales no semejantes, entonces la igualdad*

$$k + l\sqrt{M} + m\sqrt{N} = 0 \qquad (*)$$

resulta posible solamente para $k = l = m = 0$.

Abreviadamente se puede escribir así:

$$k + l\sqrt{M} + m\sqrt{N} = 0 \Leftrightarrow k = l = m = 0.$$

▶ Para la demostración analicemos dos casos: 1) $l \neq 0$ y $m \neq 0$ (k no tiene importancia), 2) uno de los coeficientes l, m es diferente de cero y el otro, igual a cero.

En el primer caso, trasladamos k al segundo miembro y elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad. Después de las correspondientes transformaciones, obtendremos

$$2lM\sqrt{MN} = k^2 - l^2M - m^2N,$$

o sea, $\sqrt{MN}$ es un número racional, lo que es erróneo. Por lo tanto, el primer caso no puede tener lugar.

En el segundo caso, de la igualdad (*) se ve que $\sqrt{M}$ o $\sqrt{N}$ son números racionales, lo que contradice la condi-

[1]) Se trata de una locución corriente: se denomina radical cuadrado no solamente el signo $\sqrt{\ }$ que simboliza la operación de extracción de una raíz cuadrada, sino que también todo número del tipo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.

ción. Por lo tanto, el segundo caso tampoco puede tener lugar.

Nos queda por reconocer que $l = m = 0$. De la igualdad (*) se ve que en este caso también $k = 0$. ■

Lema 2. *Si $\sqrt{M}$ y $\sqrt{N}$ son radicales no semejantes, entonces la igualdad*

$$k + l\sqrt{M} + m\sqrt{N} + n\sqrt{MN} = 0 \qquad (**)$$

es posible sólo para $k = l = m = n = 0$.

Más brevemente

$$k + l\sqrt{M} + m\sqrt{N} + n\sqrt{MN} = 0 \Leftrightarrow k = l = m = n = 0.$$

Supongamos que $l \neq 0$, $m \neq 0$ y $n \neq 0$. Transformemos la igualdad (**) del modo siguiente:

$$l\sqrt{M} + m\sqrt{N} = -k - n\sqrt{MN}.$$

Elevemos ambos miembros de esta igualdad al cuadrado. Después de unas transformaciones no complejas obtendremos

$$2(lm - kn)\sqrt{MN} = k^2 + n^2MN - l^2M - m^2N,$$

es decir, $\sqrt{MN}$ es un número racional, lo que es erróneo. Resulta que la suposición $l \neq 0$, $m \neq 0$ y $n \neq 0$ tiene que rechazarse, o sea, hace falta admitir que por lo menos uno de los coeficientes l, m, n es igual a cero. Pero, entonces la igualdad (**) se transforma en la igualdad (*) y, según el lema 1, todos los coeficientes restantes son iguales a cero. ■

Léma 3. *Si $p + q\sqrt{M}$ es raíz de la ecuación*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

con coeficientes enteros, entonces $p - q\sqrt{M}$ también es raíz de la misma ecuación.

◀ Sea dado

$$a_0(p + q\sqrt{M})^n + a_1(p + q\sqrt{M})^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(p + q\sqrt{M}) + a_n = 0. \qquad (*)$$

Hace falta demostrar que

$$a_0(p - q\sqrt{M})^n + a_1(p - q\sqrt{M})^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(p - q\sqrt{M}) + a_n = 0. \qquad (**)$$

Suprimimos los paréntesis en la igualdad (*). Los términos $(q\sqrt{M})^{\alpha}$ obtenidos como resultado de esta operación, los clasificamos en dos tipos:

1) α es par (incluso $\alpha = 0$). Todos estos términos son racionales. Designemos su suma por k;

2) α es impar. Todos estos términos tienen el aspecto $s\sqrt{M}$. Designemos su suma por $l\sqrt{M}$.

Por lo tanto, la igualdad (+) tendrá el aspecto

$$k + l\sqrt{M} = 0. \qquad (+++)$$

Transformemos de manera análoga la igualdad (++). Ésta se obtiene de la igualdad (+) al sustituir $q\sqrt{M}$ por $-q\sqrt{M}$. Tal sustitución no se reflejará en los términos que contienen $q\sqrt{M}$ a potencia par, mientras que los términos que contienen $q\sqrt{M}$ a potencia impar, solamente cambiarán su signo. Por esta razón la igualdad (++) obtendrá el aspecto

$$k - l\sqrt{M} = 0. \qquad (\S)$$

La igualdad (+++) puede tener lugar tan sólo para $k = l = 0$.

En efecto, para $l \neq 0$ la igualdad (+++) significa que $\sqrt{M}$ es un número racional. No obstante, si $l = 0$ entonces $k = 0$.

Pero, si $k = l = 0$, entonces es válida la ecuación (§). ■

Volvemos a esclarecer el curso de la demostración. Las igualdades (+++) y (§) son, respectivamente, las (+) y (++) transformadas. De (+++) se deduce $k = l = 0$ y de $k = l = 0$ se deduce (§).

Lema 4. *Si* $p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}$ *(donde* $\sqrt{M}$ *y* $\sqrt{N}$ *son radicales no semejantes) es raíz de una ecuación con coeficientes enteros, entonces los números* $p \pm q\sqrt{M} \pm \pm r\sqrt{N}$, *para cualesquiera combinaciones de signos son también raíces de la misma ecuación.*

▶ Para brevedad designaremos

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Sea dado

$$P(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N}) \equiv a_0(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N})^n+$$
$$+a_1(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N})^{n-1}+\ldots+$$
$$+a_{n-1}(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N})+a_n=0. \qquad (§§)$$

Se requiere demostrar que

$$P(p\pm q\sqrt{M}\pm r\sqrt{N})=0.$$

En la igualdad (§§) suprimimos los paréntesis. Todos los términos obtenidos como resultado de esta operación obtendrán el aspecto

$$Ap^{\alpha}(q\sqrt{M})^{\beta}(r\sqrt{N})^{\gamma},$$

donde A son coeficientes; α, β, y γ, índices enteros no negativos. Clasificamos estos términos en cuatro tipos:

Tipo	β	γ	Aspecto del término
1	Par	Par	Racional
2	Par	Impar	$t\sqrt{N}$
3	Impar	Par	$u\sqrt{M}$
4	Impar	Impar	$v\sqrt{MN}$

Una vez suprimidos los paréntesis la igualdad (§§) adquirirá el aspecto

$$P(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N}) \equiv k+l\sqrt{M}+m\sqrt{N}+$$
$$+n\sqrt{MN}=0.$$

Si sustituimos $q\sqrt{M}$ por $-q\sqrt{M}$ esto no influirá sobre los términos del tipo 1 y 2, mientras que los términos del tipo 3 y 4 solamente cambiarán de signo. Por lo tanto, si

$$P(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N})=k+l\sqrt{M}+m\sqrt{N}+n\sqrt{MN},$$

entonces

$$P(p-q\sqrt{M}+r\sqrt{N})=k-l\sqrt{M}+m\sqrt{N}-n\sqrt{MN}.$$

Repitiendo razonamientos análogos para diferentes combinaciones de signos, hallamos: si

$$P(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N})=k+l\sqrt{M}+m\sqrt{N}+n\sqrt{MN},$$

entonces

$$P(p+q\sqrt{M}-r\sqrt{N})=k+l\sqrt{M}-m\sqrt{N}-n\sqrt{MN};$$
$$P(p-q\sqrt{M}+r\sqrt{N})=k-l\sqrt{M}+m\sqrt{N}-n\sqrt{MN};$$
$$P(p-q\sqrt{M}-r\sqrt{N})=k-l\sqrt{M}-m\sqrt{N}+n\sqrt{MN};$$

si $P(p+q\sqrt{M}+r\sqrt{N})=0$, entonces según el lema 2, $k=l=m=n=0$. Pero, en este caso también los valores restantes $P(p\pm q\sqrt{M}\pm r\sqrt{N})$ son ceros. ■

Ahora analizaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. El número $1+\sqrt{2}$ es una irracionalidad cuadrática. ¿Cómo hallar la ecuación cuadrática que engendra esta irracionalidad?

De acuerdo con el lema 3, el número $1-\sqrt{2}$ también representa una raíz de esta ecuación. Por lo tanto, esta ecuación tiene el aspecto:

$$(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=0$$

o bien

$$x^2-2x-1=0.$$

Ejemplo 2. El número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ no es una irracionalidad cuadrática. La ecuación con coeficientes enteros que lo engendra, según el lema 4, tiene las raíces: $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $x_4=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Por lo tanto, esta ecuación tiene el aspecto:

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$$

o bien

$$x^4-10x^2+1=0.$$

Observación 1. Por supuesto, se puede encontrar la ecuación por sus raíces por otro procedimiento, o sea, va-

liéndose de las fórmulas de Viete. Para la ecuación reducida de cuarto grado

$$x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4=0$$

las fórmulas de Viete se escriben así:

$$\left.\begin{aligned} p_1&=-(x_1+x_2+x_3+x_4);\\ p_2&=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4;\\ p_3&=-(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3);\\ p_4&=x_1x_2x_3x_4.\end{aligned}\right\}$$

Observación 2. Es posible que el lector quede sorprendido si desea comprobar si se ha compuesto correctamente la ecuación a base de sus raíces. La solución de esta ecuación nos da

$$x=\pm\sqrt{5\pm2\sqrt{6}}.$$

A primera vista esto no coincide con las raíces dadas $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$. En realidad $\sqrt{3}\pm\sqrt{2}=\sqrt{5\pm\sqrt{2\ 6}}$. Podemos convencernos de esto ora elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, ora haciendo uso de la llamada fórmula para la transformación de radicales compuestos

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\quad\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \tag{4.3}$$

Es útil hacer uso de la fórmula (4.3) tan sólo en aquellos casos cuando A^2-B es un cuadrado perfecto. En el ejemplo aducido nos encontramos precisamente con este caso

36. Teorema de Euler. Una fracción continua infinita se denomina *periódica* si sus elementos forman una secuencia periódica. Tales son, por ejemplo, las fracciones

$$\left.\begin{aligned} &[0;\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots];\\ &[2;\ 1,\ 5,\ 1,\ 5,\ 1,\ 5,\ \ldots];\\ &[0;\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ \ldots].\end{aligned}\right\}$$

Las dos primeras fracciones son *periódicas puras* y la tercera es *mixta periódica*. Haciendo esta distinción no

nos fijamos en la parte entera a_0. Una definición más directa es la siguiente.

Una fracción continua infinita se denomina periódica si existen tales números naturales N y k que para cualquier $n \geqslant N$

$$a_{n+k} = a_n.$$

Tiene lugar el siguiente teorema demostrado en 1737 por Leonardo Euler.

Teorema. *El valor de una fracción continua periódica constituye una irracionalidad cuadrática*

Examinemos dos ejemplos.

Ejemplo 1. [0; 1, 1, 1, . . .]. Tenemos

$$\alpha = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}.$$

Apliquemos a esta igualdad el llamado proceso de «*devanado*» que consiste en la alternación de dos pasos: 1) tomamos de cada miembro de la igualdad su valor inverso; 2) sustraemos de cada miembro de la igualdad una parte entera. En nuestro ejemplo, damos estos pasos sólo una vez:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}},$$

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}.$$

Ahora en el miembro derecho se ha obtenido la fracción de partida, es decir α:

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \alpha,$$

es decir, hemos obtenido una ecuación cuadrática para α:

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0,$$

de donde $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (está claro que la raíz negativa no sirve).

De este razonamiento se ve que cada fracción de la forma $[0; a, a, a, \ldots]$ representa una irracionalidad cuadrática.

¿Y si el período está constituido no por un número, sino por k números? Entonces, hace falta dar en el «devanado» k pares de pasos.

Ejemplo 2. $[0; 1, 2, 1, 2, \ldots]$

$$\alpha=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}}};$$

$$\frac{1}{\alpha}-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}}};$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1}-2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ddots}};$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1}-2=\alpha$$

o bien

$$\alpha^2+2\alpha-2=0,$$

de donde

$$\alpha=-1+\sqrt{3}.$$

Señalemos que para cualquier período la raíz no puede resultar racional, ya que la fracción continua inicial es infinita.

¿Y si a_0 no es igual a cero? En este caso trasladamos a_0 a la parte izquierda y luego comenzamos el «devanado». ■

No obstante, para un período largo este procedimiento resulta muy voluminoso. Por esta razón aducimos una demostración más, no tan clara pero más breve,

▶ Sea la fracción continua infinita $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — periódica pura con la longitud del período igual a k. Entonces $\alpha = \alpha_{k+1}$ (recordemos que α_{k+1} es el $(k+1)$-ésimo cociente completo): $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \underbrace{a_1, a_2, \ldots}_{\alpha_{k+1}}]$.

De acuerdo con la fórmula (3.5)

$$\alpha = \frac{p_k\alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k\alpha_{k+1} + q_{k-1}}.$$

Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{p_k\alpha + p_{k-1}}{q_k\alpha + q_{k-1}},$$

es decir, α satisface la ecuación cuadrática

$$q_kx^2 + (q_{k-1} - p_k)\,x - p_{k-1} = 0. \qquad (\S\S\S)$$

Las raíces de esta ecuación tienen signos diferentes, α es una raíz positiva.

Se se trata de una fracción mixta periódica

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_N, \underbrace{a_{N+1}, \ldots, a_{N+k}}_{\text{período}}, \ldots],$$

entonces primero hace falta «dovanar» de la derecha a la izquierda la parte inicial de la fracción hasta el elemento a_N inclusive, y luego aplicar la demostración expuesta más arriba. ■

Observación. El número α es irracional, porque es representado mediante una fracción continua infinita. Por consiguiente, el discriminante de la ecuación (§§§) no debe ser un cuadrado perfecto. Esta afirmación puede comprobarse mediante cálculos directos:

$$D = (p_k - q_{k-1})^2 + 4p_{k-1}q_k = p_k^2 - 2p_kq_{k-1} + q_{k-1}^2 + 4p_{k-1}q_k = \ldots$$

Adicionemos y sustrayamos el miembro $4p_kq_{k-1}$:

$$\ldots = p_k^2 + 2p_kq_{k-1} + q_{k-1}^2 - 4p_kq_{k-1} + 4p_{k-1}q_k =$$

$$= (p_k + q_{k-1})^2 - 4q_{k-1}q_k\left(\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right) = \ldots$$

En este lugar hace falta hacer uso de la fórmula (3.6):

$$\ldots = (p_k + q_{k-1})^2 + 4\cdot(-1)^k.$$

Definitivamente,

$$D = (p_k + q_{k-1})^2 + 4\cdot(-1)^k$$

o bien

$$D - (p_k + q_{k-1})^2 = \pm 4.$$

Por lo tanto D no representa un cuadrado perfecto. La diferencia de los cuadrados de los números naturales no puede ser igual a 4. Si les adjuntamos a los números naturales un cero, entonces se encontrará el único par de cuadrados, la distancia entre los cuales será igual a 4:0 y 4.

37. Teorema de Lagrange. Según hemos visto en el punto precedente el teorema de Euler se demuestra muy fácilmente. El teorema recíproco es mucho más complejo. Por primera vez lo demostró en 1770 Lagrange.

Teorema de Lagrange. *Toda irracionalidad cuadrática se representa mediante una fracción continua periódica.*

Lagrange demostró su teorema de una manera muy complicada. Muchos matemáticos conservando la idea de Lagrange, trataban de simplificar algunos detalles. Transcurridos más de 100 años el matemático francés Charves propuso una demostración más simple, basada en otra idea. Primero exponemos la idea de Charves y luego aducimos la demostración detallada.

Sea α una irracionalidad cuadrática. Vamos a desarrollarla en una fracción continua deteniéndonos alternativamente en cada paso, a partir del segundo.

$$\alpha = [a_0; a_1 | \alpha_2] = [a_0; a_1, a_2 | \alpha_3] = \ldots =$$
$$= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} | \alpha_n] = \ldots$$

Aquí $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ son cocientes completos. Ya hemos visto en el punto 18 que si cualquier cociente completo vuelve a repetirse, o sea si $\alpha_n = \alpha_{n+h}$, entonces la fracción continua resulta periódica.

En primer lugar vamos a demostrar que cada cociente no completo satisface la ecuación cuadrada con coeficientes enteros:

$$A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0. \tag{4.4}$$

Claro está que la ecuación (4.4) puede variar para diferentes α_n, por lo cual los coeficientes A, B, C van dotados de índices. Digamos así: cada α_n satisface *su* ecuación cuadrada con coeficientes enteros.

En segundo lugar, demostraremos que los coeficientes de la ecuación (4.4) están limitados por su módulo [1])

$$\left.\begin{array}{l} |A_n| < L; \\ |B_n| < M; \\ |C_n| < N. \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

¡Atención! Precisamente en esto consiste la idea ingeniosa de Charves. *Los límites L, M, N no dependen de n* (dependen únicamen-

[1]) Admitamos que la ecuación cuadrada con coeficientes enteros se escriba en forma irreducible. De lo contrario, esta afirmación no tendría sentido.

te de α). Como A_n, B_n, C_n son números enteros, para cada uno de ellos existe sólo un número *finito* de valores admisibles. Por lo tanto, para α dado el número de ecuaciones posibles (4.4) y, por consiguiente, el número de raíces posibles de dichas ecuaciones será finito. Es evidente que en la secuencia de cocientes completos $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ la repetición resulta inevitable, lo que tenemos que demostrar.

➤ Ahora comencemos a cumplir este plan. Primero demostraremos (4.4) y luego (4.5).

La irracionalidad cuadrática α satisface cierta ecuación cuadrática con coeficientes enteros

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0. \tag{i}$$

De acuerdo con la fórmula (3.5)

$$\alpha=\frac{p_{n-1}\alpha_n+p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n+q_{n-2}}. \tag{ii}$$

Sustituimos la expresión (ii) en (i) y nos liberamos del denominador:

$$A(p_{n-1}\alpha_n+p_{n-2})^2+B(p_{n-1}\alpha_n+p_{n-2})(q_{n-1}\alpha_n+q_{n-2})+$$
$$+C(q_{n-1}\alpha_n+q_{n-2})^2=0$$

o bien

$$A_n\alpha_n^2+B_n\alpha_n+C_n=0,$$

donde

$$\left.\begin{aligned} A_n&=Ap_{n-1}^2+Bp_{n-1}q_{n-1}+Cq_{n-1}^2;\\ B_n&=2Ap_{n-1}p_{n-2}+B(p_{n-1}q_{n-2}+p_{n-2}q_{n-1})+2Cq_{n-1}q_{n-2};\\ C_n&=Ap_{n-2}^2+Bp_{n-2}q_{n-2}+Cq_{n-2}^2.\end{aligned}\right\} \tag{iii}$$

Nos queda por demostrar la limitación por el módulo de los coeficientes de (iii). Según la fórmula (3.7)

$$\left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha\right|<\frac{1}{q_{n-1}^2}.$$

De otra manera puede escribirse así:

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha=\frac{\delta}{q_{n-1}^2},$$

donde $-1<\delta<1$, de donde

$$p_{n-1}=\alpha q_{n-1}+\frac{\delta}{q_{n-1}} \qquad (-1<\delta<1).$$

Sustituimos esta expresión para p_{n-1} en la primera fórmula de (iii):

$$A_n=A\left(\alpha q_{n-1}+\frac{\delta}{q_{n-1}}\right)^2+B\left(\alpha q_{n-1}+\frac{\delta}{q_{n-1}}\right)q_{n-1}+$$
$$+Cq_{n-1}^2=q_{n-1}^2(A\alpha^2+B\alpha+C)+2A\delta+B\delta+\frac{A\delta^2}{q_{n-1}^2}=\ldots$$

Está claro que la expresión entre paréntesis es igual a cero en virtud de (i):

$$\ldots = \left(2A\alpha + B + \frac{A\delta}{q_{n-1}^2}\right)\delta.$$

Pero $|\delta| < 1$, por lo tanto,

$$|A_n| < \left|2A\alpha + B + \frac{A\delta}{q_{n-1}^2}\right|.$$

Al mismo tiempo tomamos en consideración que $q_{n-1}^2 > 1$ ($q_0 = 1$ y la secuencia q_n es estrictamente creciente). Al desechar q_{n-1}^2 (o sea, al sustituirlo por la unidad) acentuamos la desigualdad:

$$|A_n| < |2A\alpha + B + A\delta| \leqslant |2A\delta| + |B| + |A| \cdot |\delta| <$$
$$< |2A\alpha| + |B| + |A|.$$

Conseguimos el propósito: hemos indicado para $|A_n|$ el límite que no depende de n.

En vez de realizar cálculos análogos para $|C_n|$, señalemos que C_n se obtiene de A_n al sustituir n por $n-1$, es decir, $C_n = A_{n-1}$. Como el límite hallado no depende de n, sirve también para C_n. Para B_n resulta mejor hacer la ronda. Calculemos el discriminante de la ecuación (4.4) partiendo de la fórmula (iii). Omitimos un largo cálculo poco interesante[1] y aducimos el resultado:

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2 (B^2 - 4AC).$$

Pero, conforme a la fórmula (*),

$$p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^{n-2}.$$

Por lo tanto

$$B_n^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC. \qquad (4.6)$$

Esta fórmula interpreta un hecho natural: al desarrollar una irracionalidad cuadrática α en fracción continua los cocientes completos representan irracionalidades cuadráticas de la misma naturaleza que α. Esta naturaleza se determina por el discriminante. Todas ellas tienen el aspecto $\alpha_n = s_n + t_n\sqrt{D}$, siendo D constante.

Ahora de (4.6) sacamos la conclusión

$$B_n^2 = B^2 - 4AC + 4A_nC_n.$$

Como todos los términos derechos son limitados entonces B_n^2, y por lo tanto B_n será limitado. ■

Los teoremas de Euler y de Lagrange pueden unirse en la siguiente formulación: *las irracionalidades cuadráticas y sólo éstas están representadas mediante fracciones continuas periódicas.*

---

[1] Que el lector lo haga por sí mismo. Cada matemático tiene que armarse de paciencia y no tener miedo a cálculos largos

CAPÍTULO V

APROXIMACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

§ 10. APROXIMACIÓN MEDIANTE FRACCIONES CONGRUENTES

38. Aproximación útil (conveniente). Después de un camino agotador llegamos al objetivo de nuestro viaje. En el presente capítulo conoceremos para qué se requieren las fracciones continuas.

En el § 1 hemos aclarado en qué consiste el problema de aproximación en toda la extensión de la palabra. Ahora nos ocuparemos de un problema más concreto. Sea dado un conjunto de números reales **R**[1]), y en el mismo un subconjunto M_q de todas las fracciones, cuyo denominador no sobrepasa de q. Es necesario indicar para cada número $\alpha \in$ R el número más próximo al mismo $r \in M_q$.

Admitamos que hemos encontrado este número, o sea, la aproximación $\alpha \approx r$. Dicha aproximación resulta útil por el hecho de que *es imposible elevar la precisión sin aumentar el denominador*: puesto que r es el número más próximo a α del conjunto M_q.

Anotemos que si hubiéramos tomado un conjunto de fracciones con denominadores *exactamente iguales a* q, entonces tal aproximación, en general, no sería útil en el sentido mencionado. Por ejemplo del punto 4 de la tabla 1 se ve que el valor aproximado de π en décimas partes no resulta útil: las partes mayores (novenas, octavas, séptimas y sextas) brindan un resultado más exacto.

El concepto de «utilidad» no tiene en la teoría de la aproximación un sentido único definido, por lo cual nos vemos obligados a determinar cada vez en qué sentido hablamos de la utilidad.

39. Propiedad fundamental de las fracciones congruentes. Podemos considerar la mejor aproximación racional del número α la fracción p/q, que posee la propiedad siguiente: nos brinda el menor error absoluto en

[1]) Basta con considerar un conjunto de números reales positivos, ya que el uso de los números negativos no ofrece nada nuevo de principio: si $\pi \approx 22/7$ entonces $-\pi \approx -22/7$.

comparación con cualquier otra fracción, cuyo denominador es $\leqslant q$[1]). Dado este caso, *las fracciones congruentes sirven de mejores aproximaciones para una fracción continua*. Esta propiedad se denomina a veces *propiedad fundamental de las fracciones congruentes*. La formularemos de la manera siguiente:

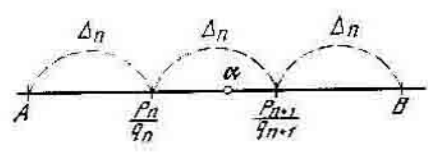


Fig. 12

Teorema. *Si* $\frac{p_n}{q_n}$ $(n \geqslant 1)$ *es una fracción congruente para el número* α y $\frac{p}{q}$ *es otra cualquiera fracción en la cual* $q \leqslant q_n$, *entonces*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \tag{5.1}$$

Esto significa que una fracción congruente nos da una aproximación que no puede perfeccionarse sin aumentar el denominador.

▶ Consideremos dos casos: 1) $q < q_n$; 2) $q = q_n$ (como veremos, el segundo caso es trivial.)

1) El número α pertenece al segmento comprendido entre dos fracciones congruentes $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (fig. 12). La longitud de este segmento es $|\Delta_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$. El punto α puede ser el punto interior de este segmento o coincidir con $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (si α es racional y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, la última fracción congruente). De tal modo,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant |\Delta_n|.$$

Sea p/q cualquier fracción, cuyo denominador es menor que q_n y, por lo tanto, con mayor motivo menor que

[1]) Por supuesto, la mejor aproximación en este sentido no es la única.

q_{n+1}:

$$q < q_n < q_{n+1}.$$

Estimemos la distancia p/q con respecto a los extremos del segmento $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$:

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - p_n q|}{qq_n} \geqslant \frac{1}{qq_n};$$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{|pq_{n+1} - p_{n+1} q|}{qq_{n+1}} \geqslant \frac{1}{qq_{n+1}}.$$

Estas desigualdades se acentuarán si sustituyamos en los primeros miembros q por un número mayor q_n ó q_{n+1}:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_{n+1}q_n} = |\Delta_n|; \\ \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{p_{n+1}}\right| > \frac{1}{q_n q_{n+1}} = |\Delta_n|. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

El sentido de las desigualdades (*) es: el punto p/q está alejado con respecto a cada uno de los extremos del segmento $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$ a una distancia mayor que la longitud de este segmento $|\Delta_n|$. Separando a la izquierda y a la derecha de los puntos $\frac{p_n}{q_h}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n-1}}$ el segmento Δ_n (fig. 12) obtendremos una zona prohibida $[AB] = \left[\frac{p_n}{q_n} - \Delta_n, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} + \Delta_n\right]$, en la cual no puede encontrarse la fracción p/q (los puntos A y B también son prohibidos). Ahora está claro que p/q es peor aproximación para α que $\frac{p_n}{q_n}$. En realidad,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < |\Delta_n|;$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > |\Delta_n|.$$

Por consiguiente,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \quad (q < q_n).$$

2) Ahora analicemos el caso $q = q_n$. ¿Es posible que otra fracción con el mismo denominador proporcione

mejor o la misma aproximación que la fracción congruente? Con otras palabras, ¿es posible que

$$\left|\alpha-\frac{p}{q_n}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| \quad (p\neq p_n)?$$

Admitamos, para precisar, que $\frac{p_n}{q_n}$ se encuentre a la izquierda de α (fig. 13), es decir, que n sea par (para n

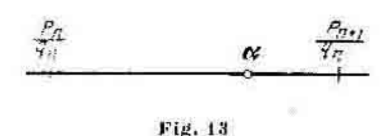


Fig. 13

impar los razonamientos son análogos). ¿Puede α encontrarse más cerca de $\frac{p_n+1}{q_n}$ que de $\frac{p_n}{q_n}$ o aunque sea en el medio, o sea, es posible que

$$\frac{p_n+1}{q_n}-\alpha\leqslant\alpha-\frac{p_n}{q_n}? \qquad (**)$$

Esto es equivalente a

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}\geqslant\frac{1}{2q_n}. \qquad (***)$$

Por otra parte, se conoce que

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}\leqslant\frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

De las desigualdades (**) y (***) se deduce que

$$\frac{1}{2q_n}\leqslant\frac{1}{q_nq_{n+1}},$$

es decir, $q_{n+1}\leqslant 2$.

Por lo tanto, si la desigualdad (**) es posible, entonces sólo para $q_{n+1}=1$ ó $q_{n+1}=2$. Estos valores pueden tener lugar para $n=0$ ó $n=1$.

Resulta que dadas estas condiciones la desigualdad (**) en realidad puede tener lugar, según demuestra el ejemplo que sigue:

$$[2;\ 2]=2+\frac{1}{2}.$$

mos un error absoluto reducido [véase la fórmula (1.1)]

$$h = |q\alpha - p|$$

y el coeficiente de utilidad [véase la fórmula (1.2)]

$$\lambda = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2|q\alpha - p|}.$$

Según estos índices las fracciones congruentes y *únicamente éstas* son más útiles que todas las demás: la fracción congruente tiene menor error absoluto reducido (y, por lo tanto, mayor coeficiente de utilidad) que todas las fracciones con denominadores menores (o iguales).

No obstante, no agotamos todavía el problema. Resulta que, según la utilidad, la fracción congruente supera no sólo las fracciones con denominadores menores o iguales, sino incluso las fracciones con denominadores más próximos mayores: aumentando el denominador no elevamos su utilidad, hasta que no lleguemos al denominador de la siguiente fracción congruente.

Entre estas afirmaciones hay dos excepciones triviales que serán aclaradas en el proceso de razonamientos.

Ahora formulemos todo lo dicho en forma de dos teoremas mutuamente recíprocos.

Teorema 1. *Si* $\frac{p_n}{q_n}$ *es una fracción congruente para el número* α *y* $\frac{p}{q}$, *cualquier otra fracción, y además* $q < q_{n+1}$, *entonces*

$$|q_n\alpha - p_n| \leqslant |q\alpha - p|.$$

El signo de igualdad puede tener lugar únicamente en los casos: 1) $\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ es decir, $\frac{p_n}{qp}$ *es la penúltima fracción congruente*; 2) $n = 0$, $\alpha = [a_0; 2]$.

▶ Señalemos que p/q es una fracción *diferente*, es decir, excluimos el caso poco interesante cuando $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. Luego convenimos en que la fracción p/q es irreducible.

Analicemos dos casos separadamente: 1) $0 < q < q_{n+1}$, $q \neq q_n$; 2) $q = q_n$.

1) Representemos p y q como combinaciones lineales iguales (con coeficientes iguales) de los respectivos elementos de las frac-

ciones congruentes $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, o sea,

$$\left.\begin{aligned} q_n x + q_{n+1} y = q; \\ p_n x + p_{n+1} y = p. \end{aligned}\right\} \qquad (+)$$

Los coeficientes x e y se determinan por este sistema.

El determinante del sistema (+) es como sigue: $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}$. Ya conocemos esta expresión [véase el p. 19, fórmula (+)]:

$$D_n = p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.$$

Puesto que $D_n \neq 0$ sacamos la conclusión de que el sistema (+) determina unívocamente el par de números x, y. Del hecho de que $|D_n| = 1$ deducimos que x e y son números enteros.

Ambos números x e y difieren de cero. En efecto, si $x = 0$ entonces el sistema (+) nos da $y = 1$ (ya que ambas fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ son irreducibles) y $q = q_{n+1}$, lo que contradice la condición. Al mismo tiempo si $y = 0$, entonces por analogía se obtiene $q = q_n$, pero aquí no consideramos este caso.

Luego, los números x e y no pueden tener signos iguales. Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces de la primera ecuación de (+) obtendríamos $q > q_{n+1}$. Si $x < 0$ e $y < 0$, entonces resultaría que p y q serían negativos. Por lo tanto, x e y tienen signos diferentes.

A fin de obtener el error absoluto reducido para la fracción $\frac{p}{q}$ procedemos de la siguiente manera: multiplicamos la primera ecuación por α y luego sustraemos de la misma la segunda ecuación

$$(q_n\alpha - p_n)\,x + (q_{n+1}\alpha - p_{n+1})\,y = q\alpha - p. \qquad (++)$$

Los paréntesis en el primer miembro de la ecuación (++) tienen diferentes signos (ya que las fracciones $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ aproximan el número α desde lados opuestos.) Los números x e y también tienen signos diferentes. Por esta razón ambos términos en el primer miembro son positivos (para precisar, el primer término es estrictamente positivo, mientras que el segundo es no negativo). Por consiguiente,

$$|q_n\alpha - p_n|\cdot|x| + |q_{n+1}\alpha - p_{n+1}|\cdot|y| = |q\alpha - p|.$$

Así pues,

$$|q_n\alpha - p_n| \leqslant |q\alpha - p|, \qquad (5.2)$$

lo que precisamente teníamos que demostrar.

Pongamos en claro para cuáles condiciones en (5.2) puede ponerse el signo de igualdad. De todo lo expuesto se observa que será posible en el único caso si

$$\left.\begin{aligned} q_{n+1}\alpha - p_{n+1} = 0; \\ |x| = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (\S)$$

Estudiemos más detalladamente el caso (§). Si $x = 1$, entonces $y < 0$. Pero en tal caso, de la primera ecuación del vistema (+) resultaría que $q < 0$. Por lo tanto, no puede ser $x = 1$ y, por consiguiente, $x = -1$. Al mismo tiempo, $y = 1$ obligatoriamente. En realidad si admitimos que $y > 1$, entonces la primera ecuación de (+) podrá escribirse así:

$$-q_n + q_{n+1} + q_{n+1}(y-1) = q$$

y resultará que $q > q_{n+1}$.

Así pues, en el caso (§) se tiene obligatoriamente $x = -1$, $y = 1$, es decir,

$$\left.\begin{aligned} q &= q_{n+1} - q_n; \\ p &= p_{n+1} - p_n. \end{aligned}\right\} \qquad (§§)$$

En este caso en (5.2) tiene lugar el signo de igualdad.

Señalemos que la primera condición (§§) puede transformarse del modo siguiente

$$q = a_{n+1}q_n + q_{n+1} - q_n = (a_{n+1} - 1)\, q_n + q_{n-1}.$$

En el caso considerado, a_{n+1} es el último elemento de la fracción continua y, por lo tanto, $a_{n+1} \geqslant 2$. Por esta razón, de la última igualdad se deduce que

$$q > q_n.$$

De tal modo, para $q < q_n$ en (5.2) no puede existir el signo de igualdad.

2) Ahora vamos a examinar el caso $q = q_n$. Ya sabemos del p. 38 que, dado este caso, para $p \neq p_n$

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q_n}\right|.$$

Multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por q_n, obtendremos

$$|q_n\alpha - p_n| < |q_n\alpha - p|,$$

lo que había que demostrar (por supuesto, el caso excepcional posible para $n = 0$, se mantiene). El teorema queda demostrado para todos $q < q_{n+1}$. ■

Teorema 2 (recíproco). *Si para el número α y la fracción p/q el error absoluto reducido es menor que para cualquier otra fracción p'/q', para la cual $q' \leqslant q$, entonces p/q es fracción congruente para el número α.*

► Como siempre suponemos que la fracción p/q es irreducible. Además, si α es un número racional, $\alpha = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, entonces no podrá ser $q > q_{n+1}$ ya que para la fracción $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ el error absoluto reducido resulta nulo, mientras que según la condición debe ser mayor que $|q\alpha - p|$.

Admitamos que p/q no sea una fracción congruente. En este caso su denominador está comprendido entre los denominadores de cualesquiera dos fracciones congruentes vecinas, o sea,

$$q_n < q < q_{n+1}$$

En tal caso de acuerdo con el teorema anterior

$$|q_n\alpha - p_n| < |q\alpha - p|.$$

No obstante, esto refuta la condición del teorema: una vez que $q_n < q$, entonces p/q debe engendrar un error absoluto reducido menor que $\frac{p_n}{q_n}$. Por lo tanto, la suposición de que p/q no es fracción congruente, es errónea. ■

Observación 1. Hemos demostrado que *las fracciones congruentes y solamente éstas tienen menor error absoluto reducido y, como resultado, mayor coeficiente de utilidad que cualesquiera fracciones con denominadores menores.*

¿Y por qué solamente con denominadores «menores»? ¿Es que no será válido también para las fracciones con denominadores algo mayores?

No. Para los denominadores q en el intervalo $q_n < q < q_{n+1}$ es válido únicamente el teorema directo, pero el mismo es inconvertible.

Observación 2. Examinemos más detalladamente el caso (§):

$$\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \quad p = p_{n+1} - p_n, \quad q = q_{n+1} - q_n.$$

Mediante un cálculo directo mostraremos que la fracción

$$\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$$

aunque no es congruente y $q_n < q < q_{n+1}$, pero es tan útil como la convergente p_n/q_n. Los cálculos aducidos a continuación no requieren explicaciones:

$$|q\alpha - p| = \left|(q_{n+1} - q_n)\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - p_{n+1} + p_n\right| =$$

$$= \left|\frac{p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_{n+1}};$$

$$|q_n\alpha - p_n| = \left|q_n \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - p_n\right| =$$

$$= \left|\frac{q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_{n+1}},$$

con otras palabras, $|q\alpha - p| = |q_n\alpha - p_n|$. Recordemos que para $q < q_n$ esto no podrá observarse: obligatoriamente tendremos $|q\alpha - p| < |q_n\alpha - p_n|$.

Por ejemplo, para $\alpha = \frac{61}{27}$ (véase el p. 14) las fracciones congruentes consecutivas

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{7}{3}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{9}{4}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{61}{27}.$$

La fracción $\frac{p}{q} = \frac{p_3 - p_2}{q_3 - q_2} = \frac{52}{23}$, a pesar de que $4 < 23 < 27$ es tan útil como 9/4.

Observación 3. Examinemos las aproximaciones del número $\alpha = \frac{61}{27}$ mediante unas fracciones con denominadores 1, 2, 3, 4 (tabla 2).

Tabla 2

q	Valor aproximado de α	Error absoluto reducido h	Coeficiente de utilidad λ
1	$\frac{2}{1}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{27}{14} = 1\frac{13}{14}$
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{27}{26} = 1\frac{1}{26}$
3	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
4	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

Según esta tabla, *sin conocer el desarrollo del número 61/27 en un fracción continua*, podemos afirmar que 9/4 es una fracción congruente: su coeficiente de utilidad es mayor que todos los anteriores. Lo mismo se refiere a la fracción 7/3. Al mismo tiempo 5/2 no es una fracción congruente, ya que su coeficiente de utilidad es menor que el de la fracción anterior.

CAPÍTULO VI
ADIVINANZAS

§ 11. ENIGMA DEL NÚMERO DE ARQUÍMEDES

41. Llave para todos los enigmas. El lector quien estudió cuidadosamente los capítulos II, III, IV y V será premiado. Los enigmas del capítulo I ya se interpretan muy fácilmente.

Este libro tan largo ha sido escrito para una conclusión breve: *si quieres aproximar con alta precisión un número real mediante una fracción simple (no compuesta) sustitúyelo por fracciones congruentes.*

Así se descifra el enigma de Arquímedes y, por consiguiente, el problema del calendario.

Señalemos que al solucionar precisamente el problema de la aproximación de números reales mediante fracciones simples, Cristiaan Huygens llegó a obtener fracciones continuas. Él tenía que construir el modelo del Sistema Solar en el cual los planetas fueran modelados mediante ruedas dentadas. A fin de reproducir con precisión los períodos de revolución, se necesitaban ruedas con un número enorme de dientes. Huygens buscaba (y encontró) el método general de solución de este problema: sustituir estos números por otros, considerablemente menores, con la reproducción más exacta en lo posible de las relaciones de estos números. De tal modo, en calidad de instrumento auxiliar, ideó las fracciones continuas y descubrió muchas de sus propiedades, aunque estas fracciones ya fueron usadas anteriormente por el italiano Bombelli (sin penetrar tan profundamente en su naturaleza).

A propósito, N.N. Luzin decía: «En el laboratorio de un gran sabio aun las virutas tienen valor».

42. Enigma del número de Arquímedes. Para la aproximación del número π desarrollémoslo en una fracción continua. Podemos tomar la aproximación decimal de π con gran reserva de precisión, por ejemplo, $3{,}14159265 - \frac{414159265}{100000000}$, y aplicar el algoritmo de

Euclides:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 288, 1, \ldots].$$

Ahora calculamos las fracciones congruentes de acuerdo con el esquema del punto 17:

n	0	1	2	3	4
a_n	3	7	15	1	288
p_n	3	22	333	355	102 595
q_n	1	7	106	113	32 657

Eso es todo. ¡Resulta tan fácil! Esta tabla descubre el secreto de Arquímedes y, al mismo tiempo, de Metzis. De la misma se desprende:

Aproximación	Fracción congruente $\frac{p_n}{q_n}$
Nula	3 (con defecto)
Primera	$\frac{22}{7}$ (con exceso)
Segunda	$\frac{333}{106}$ (con defecto)
Tercera	$\frac{355}{113}$ (con exceso)

¿Podrá considerarse que Arquímedes y Metzis han sido desenmascarados: usaban fracciones continuas, Arquímedes utilizó la fracción congruente $\frac{p_1}{q_1}$ mientras que Metzis, $\frac{p_3}{q_3}$

No, no podemos afirmarlo para Arquímedes.

Hace falta comprender con claridad que hemos solucionado el problema matemático, pero no el histórico. Hemos demostrado cómo se puede llegar a la aproxima-

ción del número π mediante la fracción $\frac{22}{7}$, sin embargo, esto no significa que Arquímedes llevaba el mismo camino. Es verdad que no excluimos que él usaba el algoritmo de fracciones continuas. A favor de esta suposición podemos aducir dos argumentos: 1) en el caso de ausencia de fracciones decimales este camino es el más natural; 2) en la antigüedad preferían fracciones con numerador igual a la unidad. En Egipto y Babilonia usaban solamente estas fracciones, más tarde comenzaron a ponerse poco a poco en uso otras fracciones. No obstante estos argumentos son de carácter especulativo. Ningún juicio los hubiera reconocido. No existen pruebas directas. Para determinar π Arquímedes calculaba los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, haciendo uso de la «fórmula de duplicación». Además desconocemos qué método usaba para extraer las raíces cuadradas, él nos ofrece sólo el resultado final. Los historiadores no llegaron a alcanzar una opinión unánime acerca de este problema.

La ventaja de los séptimos puede también revelarse empíricamente al compararlos con otras partes más grandes. En lo que se refiere a Metzis (más exactamente, Antonius), esto es otra cosa. Resulta muy difícil suponer que tal fracción compuesta como $\frac{355}{113}$ fuera encontrada sin ayuda de la teoría. Sin duda alguna Antonius usaba fracciones continuas. Comprendemos por qué se detuvo en la fracción congruente $\frac{355}{113}$. En efecto se trata de la última fracción admisible. La fracción subsiguiente $\frac{102\,595}{32\,657}$ es tan voluminosa que no tiene ningún valor práctico.

§12. SOLUCION DEL PROBLEMA DEL CALENDARIO

43. Aplicación de las fracciones continuas. Primero pensemos en cómo nosotros mismos solucionaramos el problema de la alternación de los años bisiestos. Representaríamos la longitud del año en forma de una fracción

continua

1 año = 365 días 5 horas 48 minutos 46 segundos =
= [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64] días.

Observación 1. π es un número irracional. Se expresa mediante una fracción continua infinita. La magnitud del año es empírica. Toda magnitud empírica se mide únicamente con una precisión determinada, por lo cual no tiene sentido hablar acerca de su racionalidad o irracionalidad. La magnitud del año que acabamos de aducir es *admitida*, por lo tanto nos vemos obligados a considerarla exacta. Ella se expresa mediante una fracción continua finita.

Observación 2. Para expresar la longitud del año mediante una fracción continua no hace falta representarla por una fracción decimal en partes del día (análogamente a como lo hacíamos con el número π). Este cálculo se desarrolla así (desechamos la parte entera):

$$\frac{5 \text{ horas } 48 \text{ minutos } 46 \text{ segundos}}{1 \text{ día}} = \frac{20\,926 \text{ segundos}}{86\,400 \text{ segundos}} = \frac{10\,463}{43\,200};$$

$$43\,200 = 4 \cdot 10\,463 + 1348;$$
$$10\,463 = 7 \cdot 1348 + 1027;$$
$$1348 = 1 \cdot 1027 + 321;$$
$$1027 = 3 \cdot 321 + 64;$$
$$321 = 5 \cdot 64 + 1;$$
$$64 = 64 \cdot 1.$$

Hallamos varias fracciones congruentes iniciales. Omitimos la parte entera, ya que la existencia de 365 días enteros en cada año no requiere recuerdos:

4	7	1	3	5
1	7	8	31	163
4	29	33	128	673

Cada columna ofrece la solución del problema del calendario. Por ejemplo, la primera columna nos da para la duración del año el valor aproximado de $365\frac{1}{4}$ días. Para realizar tal duración del año hay que considerar como bisiesto un año de cada cuatro. En general, la tercera fila nos da el valor del ciclo o período, y la segunda, el número de años bisiestos en el ciclo. Por ejemplo, la segunda columna corresponde a tal solución: 7 años bisiestos cada 29 años. La duración media del año en este caso será de $365\ \frac{7}{29}$ días. Esta cifra resulta más exacta que $365\frac{1}{4}$, pero al mismo tiempo más complicada.

44. Cómo eligir el calendario. Ahora está claro que al solucionar el problema del calendario hay muy pocas variantes para elegir, solamente cuatro.

A fin de evitar equivocaciones esclareceremos que en el mundo existe un gran número de calendarios. Hay calendarios solares y lunares. Diferentes pueblos tienen un comienzo de era diferente, así como un número diferente de meses en el año (doce o trece), un comienzo del año distinto (a propósito, extremadamente diverso) y diferentes días festivos. En el presente libro examinamos el calendario en un solo aspecto (no consideramos toda la diversidad de estas diferencias): nos interesa la duración media del año. En este caso existen únicamente cuatro soluciones ventajosas (con otras palabras, suficientemente simples y exactas). Corresponden a las primeras cuatro columnas de la tabla anterior. A partir de la quinta columna ya se obtienen combinaciones demasiado complicadas. Así pues, todas las soluciones posibles se aducen en la tabla 3.

En la columna «Error» el signo «menos» indica que la duración media del año es mayor que la auténtica.

La primera variante corresponde al calendario juliano. La segunda no es conveniente: según el grado de complejidad es equivalente a la tercera, no obstante, le cede considerablemente en lo que se refiere a la exactitud.

La tercera variante (8 años bisiestos cada 33 años) ha sido propuesta por el gran sabio persa y tadzhike, el poeta, Omar Khayyam.

Tabla 3

Nº de aproximación	Alternación de los años bisiestos		Duración media del año	Error
	número de años	período		
1	1	4	365 días 6 horas 00 minutos 00 segundos	—11 minutos 14 segundos
2	7	29	365 días 5 horas 47 minutos 35 segundos	+1 minuto 11 segundos
3	8	33	365 días 5 horas 49 minutos 05 segundos	—19 segundos
4	31	128	365 días 5 horas 48 minutos 45 segundos	+1 segundo

La cuarta variante es excepcionalmente exacta. El error de 1 segundo no tiene valor práctico. Precisamente por eso se proponía utilizar este calendario. Por ejemplo, en 1864 el astrónomo ruso Medler propuso introducirlo en Rusia a partir del comienzo del siglo XX. Para ello era necesario introducir *solamente* la siguiente corrección en el calendario juliano: cada 128 años omitir un año bisiesto (es decir, considerarlo ordinario). Puesto que en el calendario juliano a cada 128 años les corresponden 32 bisiestos.

No obstante, este calendario no fue aceptado en Rusia, ni en otras partes del mundo. Probablemente, las causas consistían en que el período de 128 años no era «redondo» así como en lo acostumbrado del calendario vigente.

45. Enigma de Gregorius XIII. En el punto anterior no llegamos a descubrir el enigma de Gregorius XIII: entre las cuatro soluciones aducidas no se encuentra el calendario gregoriano. Por eso, una vez solucionado el problema matemático prestemos un poco más atención al problema histórico. ¿Cuáles fueron los argumentos de Gregorius XIII (para precisar, de la comisión organizada por él)?

Es muy seductiva la siguiente hipótesis: Gregorius XIII partía de la relación 31 : 128, pero, deseando susti-

tuir el período de 128 años por otro más cómodo, eligió el período de 400 años. Si a cada 128 años les corresponden 31 bisiestos, entonces ¿cuántos años bisiestos corresponderán a 400 años? De la proporción

$$\frac{31}{128} = \frac{x}{400}$$

se obtiene $x = 96{,}875 \approx 97$. Esto es precisamente el calendario gregoriano: 97 años bisiestos cada 400 años.

¿Un argumento convincente, no es verdad? No obstante, es erróneo.

Razonando acerca de la historia y, en particular, la historia de la ciencia, no se debe atribuir a los sabios de los siglos pasados el desarrollo actual de las ideas. Al contrario, hace falta tratar de penetrar en el círculo de sus ideas y conocimientos. Además, en la ciencia histórica son poco convincentes los razonamientos especulativos del tipo «hubiera podido ser así». Hace falta establecer, haciendo uso de los documentos históricos, que «fue precisamente así». En lo que se refiere a la reforma de Gregorius XIII, la conocemos bastante bien, en particular, conocemos la composición de la comisión encargada en elaborar el proyecto.

El error de nuestro razonamiento especulativo consiste en lo siguiente: en la época de Gregorius XIII la duración del año no era conocida tan exactamente como en la actualidad. La comisión de Gregorius XIII usaba unas tablas astronómicas compuestas por la Academia de Toledo por orden de Alfonso X (1221—1284), rey de Castilla. En las mismas se da la duración del año que sigue

1 año = 365 días 5 horas 49 minutos 16 segundos.

Representémosla mediante una fracción continua

$$1 \text{ año} = [365;\ 4,\ 8,\ 7,\ 2,\ 2,\ 17].$$

Sus fracciones congruentes (sin la parte entera) serán:

$$\frac{1}{4},\ \frac{8}{33},\ \frac{57}{235}.$$

Por esta razón la comisión de Gregorius XIII, sea cual fuera el método de su trabajo, no podía conocer nada de la relación 31/128.

Como ya se mencionó, conforme al calendario gregoriano, la duración media del año es igual a 365 días 5 horas 49 minutos 12 segundos, es decir, *sobrepasa la auténtica en 27 segundos*. Pero, nosotros lo consideramos así, mientras que Gregorius XIII consideraba que su año *era menor que el auténtico en 4 segundos*. Como vemos la comisión de Gregorius XIII podía estar totalmente satisfecha de la exactitud lograda.

En complemento a lo dicho, no hay razones para suponer que la comisión de Gregorius XIII utilizó las fracciones continuas, ya que en aquel tiempo en Europa eran desconocidas. Más bien ella llegó a su solución por el método de selección. He aquí cómo se puede hacer esto fácilmente. Según las tablas de Alfonso X el año juliano sobrepasa el auténtico en 10 minutos 44 segundos. ¿En el transcurso de cuántos años se acumulará un error igual a un día? Dividimos el día (24 horas) en 10 minutos 44 segundos:

$$\frac{24 \text{ horas}}{10 \text{ minutos } 44 \text{ segundos}} = \frac{86400}{644} \approx 134.$$

Así pues, para corregir el error del calendario juliano hace falta una vez cada 134 años omitir un año bisiesto. Pero, resulta incómodo, ya que el año 134 de turno puede no ser bisiesto. Señalemos que $134 \approx \frac{1}{3} \cdot 400$. Por lo tanto, en el transcurso de 400 años hace falta omitir tres veces el año bisiesto. Precisamente esto es el calendario gregoriano.

BIBLIOGRAFÍA

Como ya se dijo en el prefacio, este libro está destinado para los especialistas y contiene el mínimo imprescindible de conocimientos sobre las fracciones continuas. Para los lectores que desean profundizarse más en la materia les recomendamos la siguiente literatura:

1. **I. Vinográdov.** Fundamentos de la teoría de los números. Editorial Mir, Moscú, 1971.

2. **Moore C.G.** An Introduction to Continued Fractions; The National Council of Teachers of Mathematics, Washington D.C., 1964.

3. **Struik D.Y.** A Concise History of Matematics, 3rd edition, Dover, New York, 1967.

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1–110, GSP, URSS.

EN 1988 LA EDITORIAL «MIR» PUBLICARÁ

A. Borovkov

ESTADÍSTICAS MATEMÁTICAS

En este libro se expone el estado actual de la estadística matemática que contiene muchos perfeccionamientos y varios enfoques nuevos de los resultados más recientes. En el primer capítulo se analizan las propiedades de las distribuciones empíricas que forman la base de la estadística matemática. En los capítulos 2 y 3 se expone la teoría de estimaciones y la teoría de comprobación de las hipótesis estadísticas respectivamente. Las primeras partes de ambos capítulos se dedican a la descripción de todos los enfoques posibles de la solución de problemas planteados y a la búsqueda de procedimientos óptimos. Las segundas partes, a su vez, contienen la construcción de procedimientos asintóticamente óptimos.

El capítulo 4 reúne problemas estadísticos vinculados con dos o más muestras, problemas sobre homogeneidad, análisis de regresión, reconocimiento de imágenes.

En el capítulo 5 se expone la teoría general de las soluciones estadísticas, o sea, del enfoque teórico de los problemas estadísticos. Un lugar importante corresponde a la búsqueda de soluciones asintóticamente óptimas.

Esta obra se destina a los que estudian la estadística matemática. Al mismo tiempo puede despertar el interés de los especialistas que ya trabajan en este campo.

EN 1988 LA EDITORIAL «MIR» PUBLICARÁ:

K. Ribnikov

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS COMBINATORIO

Los matemáticos, ingenieros, así como los especialistas en otras ramas de la ciencia, saben que al solucionar los problemas prácticos, con más frecuencia se ven obligados a ocuparse de las estructuras discretas. Entre éstas citemos grafos, matrices, esquemas - bloque, redes eléctricas, flujos de transporte, sistemas de organización de la producción, flujos de información y muchos otros. Además, como es sabido, el funcionamiento de la mayoría de ordenadores se basa en el principio del cálculo directo.

A pesar de la heterogeneidad y el carácter específico de semejantes estructuras, éstas pueden considerarse desde posiciones de la teoría general, lo que facilita su uso y estudio. El presente libro ofrece al lector los fundamentos de esta teoría que mantiene el título históricamente formado, análisis combinatorio.

EN 1988 LA EDITORIAL «MIR» PUBLICARÁ:

A. Kurosch
CURSO DE ÁLGEBRA SUPERIOR

En este libro se expone el curso de álgebra superior que representa una de las disciplinas fundamentales de la ciencia matemática moderna. El curso de álgebra superior consta fundamentalmente de dos secciones. Una de ellas, el álgebra lineal, está dedicada al estudio de las ecuaciones de primer grado. La segunda, el álgebra de los polinomios, al estudio de una ecuación de una incógnita, pero de grado superior.

El material del libro se expone de una manera clara y a un elevado nivel científico. Para ayudar a asimilar mejor los conceptos matemáticos, al final de cada sección se dan ejemplos y problemas con resoluciones detalladas.

EN 1988 LA EDITORIAL «MIR» PUBLICARÁ:

A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En este libro se han recopilado cerca de 1000 problemas y ejercicios del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se han incluido también el método de isoclinas para las ecuaciones de primer y segundo orden, problemas para hallar las trayectorias ortogonales, la dependencia e independencia lineales de los sistemas de funciones. Además, contiene problemas para hallar la estabilidad de las soluciones, el método del parámetro pequeño el método para resolver ecuaciones y sistemas. Cada párrafo empieza con una breve introducción teórica. Después se exponen las determinaciones y los métodos principales para la solución de los problemas. Todos los problemas van acompañados de su resultado; para algunos de ellos hay indicaciones sobre cómo resolverlos.

Es un libro de texto para los estudiantes de enseñanza superior.

Lecciones populares de matemáticas

Mir publicará

Skorniakov L.
Sistemas de ecuaciones lineales

Guik E.
Juegos matemáticos recreativos

Krinitski N.
Algoritmos a nuestro alrededor

Belski A., Kaluzhnin L.
División inexacta

Beskin N.
Representación de figuras espaciales

Borovkov A.
Estadística matemática

Editorial MIR



Moscú